

Ovale und ebene algebraische Kurven mit unendlicher Kollineationsgruppe

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Doris Wagner

aus Ochsenfurt

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Mai 2005

Vorsitzender der Promotionskommission: Prof. Dr. D.-P. Häder

Erstberichterstatter: Prof. Dr. P. Plaumann

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. W. Barth

Abstract

(german)

In der vorliegenden Arbeit werden Ovale und ihre Kollineationsgruppen in kompakten unzusammenhängenden Pappos-Ebenen untersucht. Für eine gewisse Klasse von abgeschlossenen, stetig differenzierbaren Ovalen in p -adischen Ebenen – sog. Tillmann-Ovalen – wird geklärt, unter welchen Umständen diese eine transitive Kollineationsgruppe gestatten. Ovale mit transitiver Kollineationsgruppe nennt man auch homogen. Die Existenz von homogenen Ovalen in p -adischen Ebenen, die keine Kegelschnitte sind, wird nachgewiesen.

Es werden weiterhin alle algebraischen Kurven in einer projektiven Ebene über einem algebraisch abgeschlossenen Körper klassifiziert, die eine unendliche Kollineationsgruppe gestatten. Außerdem werden Scharen bzw. Mengen verschiedener algebraischer Kurven mit unendlichem gemeinsamen Stabilisator betrachtet. Hierbei wird speziell auch auf Kegelschnitte bzw. Kegelschnittscharen eingegangen.

Die Klassifikation aller algebraischen Kurven mit unendlicher Kollineationsgruppe über algebraisch nicht abgeschlossenen Körpern wird ebenfalls durchgeführt.

(english)

In this paper we study ovals and their collineation groups in compact totally disconnected Pappian planes. For a certain class of closed, continuously differentiable ovals in p -adic planes – so called Tillmann-Ovals – we answer the question, under what circumstances they have a transitive collineation group. Ovals with a transitive collineation group are also called homogeneous. The existence of homogeneous ovals in p -adic planes, which are not conics, is proved.

In addition, we classify all algebraic curves in a projective plane over an algebraically closed field, which have an infinite collineation group. We also look at sets of different algebraic curves with an infinite common stabilizer. Especially sets of conics are considered.

Also, the classification of all algebraic curves with an infinite collineation group over not algebraically closed fields is carried out.

Einleitung

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil behandelt eine Fragestellung aus der ebenen projektiven Geometrie. Um diese bearbeiten zu können, sind die Ergebnisse des zweiten Teils erforderlich: Die Klassifikation aller algebraischen Kurven in Pappos-Ebenen, die eine unendliche lineare Kollineationsgruppe gestatten. Diese Klassifikation ist vom ersten Teil unabhängig.

Der Hauptgegenstand der Untersuchungen des ersten Teils sind Ovale und ihre Kollineationsgruppen in kompakten unzusammenhängenden Pappos-Ebenen. Eine nichtleere Teilmenge \mathcal{O} der Punktmenge einer projektiven Ebene heißt Oval, falls gilt:

- (I) Jede Gerade trifft \mathcal{O} in höchstens zwei Punkten.
- (II) Zu jedem Punkt $P \in \mathcal{O}$ gibt es genau eine Gerade T , die \mathcal{O} nur im Punkt P trifft, die sogenannte Tangente.

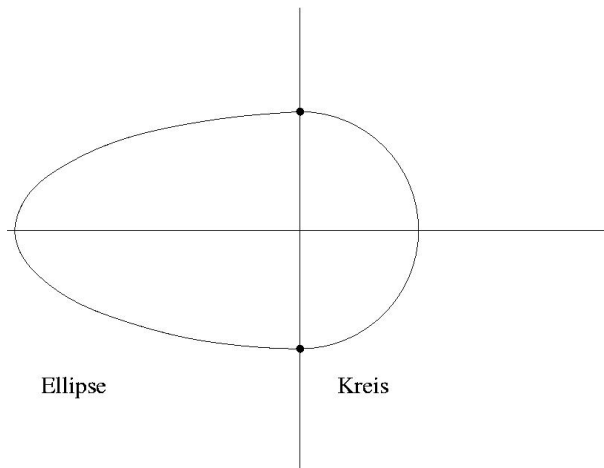
Man weiß, daß es in jeder unendlichen – nicht notwendigerweise desarguesschen – projektiven Ebene Ovale gibt (vgl. [1] und [12]). Die bekanntesten Vertreter von Ovalen in Pappos-Ebenen sind die Kegelschnitte. Ein Oval ist aber im Allgemeinen kein Kegelschnitt.

Tragen ein (kommutativer) Körper \mathbb{K} und die zugehörige projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ eine Topologie, so interessiert man sich in erster Linie für topologische Ovale, d.h. Ovale, die bzgl. der vorliegenden Topologie gutartig sind. Dies äußert sich in der Abgeschlossenheit und – je nach Körper – etwa einem geeigneten Differenzierbarkeitsbegriff. Die zentrale Frage ist hier, ob und wenn ja wie die Klasse der topologischen Ovale von den Kegelschnitten abweicht. Für die komplexe projektive Ebene etwa hat Buchanan in [3] gezeigt, daß jedes im Sinne der gewöhnlichen Topologie abgeschlossene Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ ein Kegelschnitt ist.

Wenn ein Oval über \mathbb{R} eine algebraische Kurve ist, kann ihr Grad ≥ 3 sein, wie das Beispiel $\{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : x^4 + y^4 = w^4\}$ zeigt.

Der Schwerpunkt unserer Arbeit liegt in der Betrachtung von Ovalen in kompakten unzusammenhängenden Pappos-Ebenen, wir nennen sie ultrametrische Ebenen. Ihnen liegt ein lokaler Körper zugrunde. Den Fall, daß der Restklassenkörper dieses Körpers die Charakteristik 2 hat, betrachten wir allerdings nicht.

In ultrametrischen Ebenen hat Tillmann in [16] diejenigen Ovale beschrieben, die abgeschlossen und stetig differenzierbar sind. Neben Kegelschnitten und ovalen algebraischen Kurven höheren Grades tritt hier ein zusätzlicher Ovaltyp auf, den es in der reellen Ebene auch gibt, nämlich das aus Stücken verschiedener algebraischer Kurven zusammengesetzte Oval. Das Beispiel in der folgenden Figur besteht aus einem Halbkreis und einer Halbellipse, die sich auf der y -Achse in zwei Klebepunkten treffen. Für zusammengesetzte Ovale in ultrametrischen Ebenen gibt es solche Klebepunkte nicht. Das Fehlen der Klebepunkte schlägt sich in der Gestalt der Kollineationsgruppe solcher Ovale nieder: Bei unserem reellen Ei ist diese Gruppe – beschränkt auf die affine Situation – isomorph zu \mathbb{Z}_2 . Projektiv betrachtet hat dieses Ei eine unendliche, aber nicht transitive



Kollineationsgruppe (vgl. Abschnitt 2.1.3, S.84 ff.). Im ultrametrischen Fall kann so eine Kollineationsgruppe sogar transitiv sein – das Hauptergebnis des ersten Teils der vorliegenden Arbeit (vgl. Satz 4, S. 32).

Für eine nichtleere Teilmenge M der Punktmenge einer projektiven Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ über einem beliebigen Körper bezeichnen wir mit G_M den Stabilisator der Menge M innerhalb der linearen Kollineationsgruppe $PGL_3(\mathbb{K})$. Dieser Stabilisator G_M heißt dann auch *die Kollineationsgruppe von M* . Ist M ein nichtentarteter Kegelschnitt, so operiert G_M scharf dreifach transitiv auf den Punkten von M (vgl. [5]). Wenn \mathbb{K} ein unendlicher Körper ist, folgt insbesondere, daß der Stabilisator von Kegelschnitten eine unendliche Gruppe ist. In der affinen reellen Ebene gestattet z.B. der Einheitskreis unendlich viele lineare Abbildungen auf sich selbst, nämlich einerseits die Drehungen um den Ursprung und andererseits die Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung.

In Kapitel 1 gehen wir nun der Frage nach, ob es in ultrametrischen Ebenen topologische Ovale gibt, die zwar keine Kegelschnitte sind, aber eine transitive Kollineationsgruppe zulassen. Ovale mit transitiver Kollineationsgruppe nennen wir homogen. Da in ultrametrischen Ebenen keine topologischen Ovale bekannt sind, die nichts mit algebraischen Kurven zu tun haben, beschränken wir uns auf die Betrachtung einer Klasse von Ovalen, die eine Verallgemeinerung derjenigen Ovale sind, die entweder gleich einer oder eine Teilmenge einer algebraischen Kurve sind, oder aber aus Stücken verschiedener Kurven zusammengesetzt sind. Wir nennen sie Tillmann-Ovale oder kurz T-Ovale. Das sind abgeschlossene, stetig differenzierbare Ovale, die auf einer offenen Punktmenge nichttrivial mit einer algebraischen Kurve übereinstimmen. Zur Definition der T-Ovale siehe Seite 31.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen in 1.1 und 1.2 betrachten wir im Abschnitt 1.3 homogene T-Ovale in ultrametrischen Ebenen, die keine Kegelschnitte sind. Zuerst zeigt sich, daß zu so einem Oval \mathcal{O} eine algebraische Kurve C in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit unendlicher Kollineationsgruppe existiert, für die gilt: $\mathcal{O} \cap C =: B \neq \emptyset$.

Die Menge B ist dann bzgl. der Spurtopologie von \mathcal{O} sowohl offen als auch abgeschlossen. Wir nennen sie Bogen.

Die Homogenität von \mathcal{O} impliziert weiter, daß im Falle $\mathcal{O} \not\subseteq C$ das Oval aus endlich vielen solchen Bögen B_1, \dots, B_n zusammengesetzt ist. Jeder Bogen entstammt einer algebraischen Kurve C_i und die Kurven C_i sind paarweise verschieden und projektiv äquivalent. Außerdem gilt für den

gemeinsamen Stabilisator dieser Kurven:

$$\left| \bigcap_{i=1}^n G_{C_i} \right| = \infty$$

Hier stößt man nun auf ein Problem, nämlich die Kenntnis der Stabilisatoren von algebraischen Kurven innerhalb der $PGL_3(\mathbb{K})$ bzw. die Kenntnis algebraischer Kurven in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit unendlichem Stabilisator. Zwar sind die Automorphismengruppen von Kurven (im Sinne der algebraischen Geometrie) sowie die Kurven mit unendlichen Automorphismengruppen (rationale und elliptische Kurven) aus der algebraischen Geometrie bekannt. Diese Automorphismengruppen sind aber im Allgemeinen größer als die für uns relevanten Kollineationsgruppen. Ebenso ist der übliche Kurvenbegriff der algebraischen Geometrie für unsere Fragestellungen nicht uneingeschränkt geeignet. Denn wir müssen Kurven in ultrametrischen Ebenen $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ betrachten, und die zugrundeliegenden lokalen Körper sind nicht algebraisch abgeschlossen. Problematisch ist hier auch die Frage nach den Ovaleigenschaften einer Kurve, wenn man ihre Gleichung nicht explizit kennt.

Ohne die Kenntnis aller algebraischen Kurven $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit unendlichem Stabilisator G_C bzw. Mengen von algebraischen Kurven mit unendlichem gemeinsamen Stabilisator für lokale Körper \mathbb{K} können wir die Frage nach der Existenz bzw. Nichtexistenz von homogenen T-Ovalen nicht lösen. Isoliert von dieser geometrischen Frage ist die Klassifikation aller Kurven mit unendlicher Kollineationsgruppe in projektiven Ebenen $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ über einem unendlichen Körper eine sehr interessante Problemstellung. Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit lösen wir mit eher elementaren Methoden dieses Klassifikationsproblem für beliebige Charakteristiken $\neq 2$. Dabei stehen folgende Fragen im Mittelpunkt:

- (1) Klassifikation ebener algebraischer Kurven vom Grad ≥ 3 mit unendlichem Stabilisator über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{L} sowie die explizite Darstellung dieser Kurven durch Normalformen algebraischer Gleichungen.
- (2) Für einen unendlichen, nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} die Klassifikation ebener algebraischer Kurven C vom Grad ≥ 3 mit $|C| = \infty$ und $|G_C| = \infty$.
- (3) Für einen beliebigen unendlichen Körper und eine mindestens zweielementige Menge $\mathcal{C} = \{C_i : i \in I\}$ von paarweise verschiedenen Kurven C_i vom Grad ≥ 2 , so daß für alle i gilt $|C_i| = \infty$ und $|G_{C_i}| = \infty$, die Fragen:

Wann ist $|\bigcap_{i \in I} G_{C_i}| = \infty$ und wie sehen \mathcal{C} und $G_{\mathcal{C}} := \bigcap_{i \in I} G_{C_i}$ aus?

Mit der Frage (3) speziell für Kegelschnitte beschäftigen wir uns im Kapitel 2.1. Es stellt sich heraus, daß zwei oder mehr Kegelschnitte mit unendlichem gemeinsamen Stabilisator in einer sogenannten Kegelschnittschar \mathcal{K} enthalten sind (vgl. die Abbildung auf Seite 78) und daß der zugehörige gemeinsame Stabilisator $G_{\mathcal{K}}$ eine sogenannte Buekenhoutgruppe ist (vgl. Def. 8 auf Seite 74). Im Affinen über \mathbb{R} beispielsweise kann \mathcal{K} gleich der Menge aller Kreise um den Ursprung sein, die zugehörige affinisierte Buekenhoutgruppe ist dann genau die bereits erwähnte Gruppe von Drehungen und Spiegelungen: Die unendlich ferne Gerade ist dabei Fixgerade dieser Buekenhoutgruppe und gleichzeitig Passante bzgl. jedes Kreises der Schar. Ein weiteres interessantes Ergebnis ist die Existenz einer Bijektion zwischen den projektiven Äquivalenzklassen solcher Kegelschnittscharen inklusive Buekenhoutgruppen und der Menge der Quadratklassen des zugrundeliegenden Körpers \mathbb{K} .

Der nächste Schritt ist, sich mit irreduziblen Kurven vom Grad ≥ 3 zu befassen, zunächst über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{L} der Charakteristik $\neq 2$. Dies geschieht in den Abschnitten 2.2 und 2.3.1. Hier liefern bekannte Aussagen aus der algebraischen Geometrie sehr

schnell eine Einschränkung des Grades singularitätenfreier Kurven mit unendlichem Stabilisator: Nur Kurven vom Grad 3 sind zu betrachten. Diese haben eine unendliche Automorphismengruppe. Da die betrachteten Kurven aber – eingebettet in die projektive Ebene – endlich viele Wendepunkte besitzen, sind diese Kurven relativ starr. Ihre Kollineationsgruppe operiert nämlich auf der Menge dieser Wendepunkte und durch Betrachtung dieser Wirkung sieht man, daß die Stabilisatoren der nichtsingulären Kurven vom Grad 3 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $\neq 2$ endlich sind.

In 2.3.1 werden singuläre Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{L} untersucht. Da der Stabilisator von vier Punkten in allgemeiner Lage innerhalb der $PGL_3(\mathbb{L})$ trivial ist, kann eine singuläre Kurve C mit unendlichem Stabilisator G_C nur eine relativ einfache Singularitätenkonfiguration haben, denn G_C muß auf der Menge S dieser Singularitäten operieren.

Wir erläutern unser Vorgehen am einfachsten Beispiel, den verallgemeinerten Parabeln, kurz VP-Kurven. Affin haben sie die Gleichung $x^n = y^k$ für zwei teilerfremde natürliche Zahlen n und k . Nimmt man an, eine irreduzible algebraische Kurve $C = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : \sum a_{ijl} w^i x^j y^l = 0\}$ hat eine unendliche Kollineationsgruppe G_C und mindestens zwei Singularitäten¹ mit verschiedenen Tangenten, so kann man oBdA. für die Singularitätenmenge $S = \{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)\}$ annehmen. Jede dieser Singularitäten hat mindestens eine Tangente, also kann man weiter annehmen, daß zwei dieser Tangenten sich im Punkt $(0 : 1 : 0)$ treffen. Die Gruppe G_C hat nun einen Normalteiler N_C von endlichem Index, der die drei Einheitspunkte $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ punktweise festläßt. Als nächstes überlegt man sich, daß die Kurve C auf dem Einheitsdreieck Δ keine Punkte außer den Ecken besitzen kann. Denn sonst hätte der Normalteiler N_C wiederum einen unendlichen Normalteiler N , der auf den Schnittpunkten von C mit den Kanten von Δ trivial operieren würde. Dieser Normalteiler N bestünde dann aus unendlich vielen Homologien mit identischem Zentrum auf Δ und identischer Achse (eine Kante von Δ). Da C außerhalb von Δ immer Punkte besitzen muß, gäbe es somit mindestens einen Punkt, der unter N eine unendliche kollineare Bahn hätte, was nicht sein kann.

Mit diesen Informationen kann man nun die meisten der Koeffizienten a_{ijl} der Gleichung von C wegdiskutieren und erhält $C = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : w^{n-k} y^k = x^n\}$. Die Gruppe G_C ist dann (bis auf einen Sonderfall) isomorph zu

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^k & 0 \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : t \in \mathbb{L} \setminus \{0\} \right\} \leq GL_3(\mathbb{L}).$$

Für Körper der Charakteristik Null sind diese VP-Kurven bis auf projektive Äquivalenz die einzigen algebraischen Kurven vom Grad ≥ 2 mit unendlicher Kollineationsgruppe. Die Kegelschnitte sind natürlich für $k = 1$ und $n = 2$ darin enthalten; die Kollineationsgruppe ist in diesem Fall größer als die oben angegebene Gruppe.

Im Falle endlicher ungerader Charakteristik p gibt es zusätzlich zu diesen verallgemeinerten Parabeln noch drei weitere Kurventypen mit unendlichem Stabilisator. Das sind zunächst die sogenannten Translationskurven, irreduzible Kurven C mit einer Gleichung in Normalform der Gestalt

$$w^{p^N-1} y + \sum_{i=1}^N w^{p^N-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) = 0 \quad (a_i, b_i \in \mathbb{L}, N \in \mathbb{N}).$$

Ihre Kollineationsgruppe G_C ist ein semidirektes Produkt mit einem Normalteiler von endlichem

¹Der Kurventyp $x^n = y$ hat zwar nur eine Singularität, aber anstelle der zweiten Singularität existiert hier ein Wendepunkt.

Index, der repräsentiert wird von

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : r : s) \in C \right\}.$$

Der zweite Faktor dieses semidirekten Produkts wird oBdA. durch endlich viele Diagonalmatrizen repräsentiert.

Aus affiner Sicht – die einzige Singularität von C liegt dann auf der unendlich fernen Geraden, welche gleichzeitig die einzige Tangente dieser Singularität ist und somit unter G_C festbleibt – besteht obiger Normalteiler aus Translationen $(x, y) \mapsto (x + r, y + s)$, daher der Name Translationskurve.

Nur für endliche Charakteristik p existiert der oben erwähnte Sonderfall von VP-Kurven. Das sind verallgemeinerte Parabeln, die die Nullstellenmenge der Gleichung $w^{p^N-1}y = x^{p^N}$ sind für ein $N \in \mathbb{N}$. Diese Kurven sind sowohl VP- als auch Translationskurven. Ihre Kollineationsgruppe wird repräsentiert von

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & t & 0 \\ r^{p^N} & 0 & t^{p^N} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : r \in \mathbb{L}, t \in \mathbb{L} \setminus \{0\} \right\}.$$

Ebenfalls nur im Falle $\text{char } \mathbb{L} = p$ gibt es die sogenannten KV-Kurven. Sie sind mit den Kegelschnitten verwandt. Hierzu betrachten wir für ein $N \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, N$ die Kegelschnittgleichungen

$$F_i(w, x, y) = \alpha_i wx + \beta_i wy + \frac{1}{2} \beta_i x^2.$$

Wir bilden daraus das homogene Polynom

$$F(w, x, y) = \sum_{i=0}^N (w^2)^{p^N - p^i} (F_i(w, x, y))^{p^i},$$

d.h. wir wenden auf F_i die i -te Potenz des Frobeniusautomorphismus an und summieren anschließend auf – entsprechend homogenisiert durch die zugehörige w -Potenz. Diejenigen F_i , die von Null verschieden und irreduzibel sind, definieren (affin) Parabeln $y = -\frac{\alpha_i}{\beta_i}x - \frac{1}{2}x^2$, die die unendlich ferne Gerade auf der y -Achse in der einzigen Singularität von C treffen und den Punkt $(0, 0)$ gemeinsam haben. Die unendlich ferne Gerade ist dann die einzige Tangente obiger Singularität. Die zugehörige Kollineationsgruppe ist ein semidirektes Produkt mit einem Normalteiler von endlichem Index, der repräsentiert wird von der (kommutativen) Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : a : b) \in C \right\}.$$

Für den zweiten Faktor dieses semidirekten Produktes kann man oBdA. annehmen, daß er von endlich vielen Diagonalmatrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Von solchen Matrizen repräsentierte Kollineationen lassen übrigens alle Kegelschnitte der Form $wy = ax^2$ mit $a \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ fest.

Nachdem diese Kurventypen und ihre Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern bekannt

sind, kann der gemeinsame Stabilisator mehrerer solcher Kurven, also die Frage (3) für einen algebraisch abgeschlossenen Körper, untersucht werden. Dies geschieht im Abschnitt 2.3.2.

Ähnlich wie bei den Kegelschnitten findet man, daß gewisse Scharen der erhaltenen Kurventypen einen unendlichen gemeinsamen Stabilisator zulassen. So hat etwa die Schar

$$C = \{C(a) = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : w^{n-k}y^k = ax^n\} : a \in \mathbb{L} \setminus \{0\}\}$$

einen gemeinsamen Stabilisator, der von

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^k & 0 \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : t \in \mathbb{L} \setminus \{0\} \right\} \leq GL_3(\mathbb{L})$$

repräsentiert wird. Die Kurven $C(a)$ überdecken die Ebene bis auf das Einheitsdreieck einfach und haben dieselben Singularitäten. Ähnliche Überdeckungseigenschaften kennzeichnen auch die entsprechenden Scharen der anderen Kurventypen. Eine notwendige Bedingung dafür, daß mehrere Kurven einen unendlichen gemeinsamen Stabilisator zulassen, ist, daß diese Kurven projektiv äquivalent sind.

Der Abschnitt 2.3.3 widmet sich nun den Fragen (2) und (3) für beliebige unendliche, insbesondere algebraisch nicht abgeschlossene Körper \mathbb{K} mit algebraischem Abschluß \mathbb{L} .

Wenn eine über \mathbb{K} definierte Kurve unendlich viele Punkte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und einen unendlichen Stabilisator innerhalb der $PGL_3(\mathbb{K})$ hat, ist die Kurve die Menge der \mathbb{K} -rationalen Punkte einer über \mathbb{L} gegebenen Kurve C' und C' ist eine verallgemeinerte Parabel, eine Translationskurve oder eine KV-Kurve, allerdings nicht notwendigerweise in Normalform. Das heißt, es existiert eine Kollineation $\alpha \in PGL_3(\mathbb{L})$ und eine Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ mit Gleichung in Normalform, so daß $C^\alpha = C'$ ist. Gekennzeichnet ist so eine Normalform hauptsächlich dadurch, daß eventuell vorhandene Singularitäten in die Ecken des Einheitsdreiecks Δ hineinfallen, also insbesondere in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ liegen. Weiter sind die Tangenten an die Singularitäten dann Kanten von Δ . Singularitäten und Singularitätentangenten von $C^\alpha = C'$ müssen nicht a priori \mathbb{K} -rational sein, es kann eine Singularität von C^α z.B. in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L}) \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ liegen. Bis auf einen Sonderfall in Charakteristik 3 konnten wir aber tatsächlich die Existenz (über \mathbb{K}) derselben Kurventypen samt Gruppen nachweisen und durch dieselben Normalformen charakterisieren. Bei nicht perfekten Körpern kann im Falle der Translationskurven eine Singularität „verschluckt“ werden, d.h. über \mathbb{K} ist die entsprechende Kurve eventuell singularitätenfrei. Die Normalformen der zugehörigen Gleichungen behalten aber ihre algebraische Struktur.

Der erwähnte Sonderfall für nicht perfekte Körper der Charakteristik 3 kann nur für KV-Kurven auftreten. Hier ist es uns nicht gelungen, die Existenz oder Nichtexistenz von (über \mathbb{K}) singularitätenfreien Beispielen mit unendlich vielen \mathbb{K} -rationalen Punkten nachzuweisen. Hierfür müßte man zusätzliche Informationen über den Körper haben. Für die Lösung des geometrischen Problems des ersten Teils der Arbeit ist die vollständige Kenntnis von KV-Kurven in Charakteristik 3 aber auch nicht nötig.

Kehren wir zurück zu der Frage, ob in ultrametrischen Ebenen homogene Tillmann-Ovale existieren, die keine Kegelschnitte sind. Überträgt man die Definition des T-Ovals auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, so folgt mit unseren Ergebnissen über Kurven, daß jedes homogene reelle T-Oval ein Kegelschnitt sein muß. Für die ultrametrischen Ebenen, deren Topologie total unzusammenhängend ist, ist diese Aussage im Allgemeinen falsch, genauer, ihre Richtigkeit hängt ab vom vorliegenden lokalen Körper. Jeder solche Körper \mathbb{K} besitzt einen sogenannten Restklassenkörper \mathbb{F} , dieser ist endlich. Die Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ gestattet einen Homomorphismus π auf die endliche Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ und die möglichen endlichen Bilder \mathcal{O}^π von Ovalen \mathcal{O} in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ wurden von Tillmann in [16] charakterisiert. Ist ein Oval in

$\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ein homogenes T-Oval und kein Kegelschnitt, so besteht es, wie bereits erwähnt, aus endlich vielen Bögen B_i . Jeder Bogen entstammt einer algebraischen Kurve C_i und alle Kurven C_i sind zueinander projektiv äquivalent. Außerdem ist die Kollineationsgruppe jeder dieser Kurven eine unendliche Gruppe.

Nun kann man annehmen, daß etwa C_1 ein Kegelschnitt, eine verallgemeinerte Parabel, eine Translations- oder eine KV-Kurve ist. Mit Hilfe der Tillmannschen Charakterisierung der Bilder von Ovalen und zahlreichen gruppentheoretischen Überlegungen kann man nun die obigen Kurventypen nacheinander durchdiskutieren. Zentral dabei ist die explizite Kenntnis der möglichen Kollineationsgruppen der vorliegenden Kurven. Diese Gruppen operieren nämlich meistens nicht nur auf den Kurven bzw. Ovalen in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, sondern auch auf der Bildebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ und den Bildovalen \mathcal{O}^π .

Es ist viel Kleinarbeit nötig, die in der arithmetischen Struktur des vorliegenden lokalen Körpers begründet ist, etwa endlicher Charakteristik oder nicht, Lösbarkeit der Gleichung $x^2 = -1$ oder aber die Existenz gewisser Einheitswurzeln. Die einzelnen Ergebnisse sind im Satz 4 auf Seite 32 zusammengefaßt.

Für lokale Körper \mathbb{K} mit Restklassenkörper $\mathbb{F} = GF(3)$ konnten wir mehrere Beispiele von homogenen T-Ovalen finden, z.B. ein Oval, das aus zwei Bögen von verallgemeinerten Parabeln vom Grad 5 besteht (vgl. Hilfssatz 10).

Falls $4 \mid |\mathbb{F}| - 1$ gilt, d.h. falls -1 Quadratzahl in \mathbb{K} ist, gibt es T-Ovale mit transitiver Gruppe, die aus Stücken von Kegelschnitten zusammengesetzt sind. Dasselbe gilt für lokale Körper \mathbb{K} mit $\text{char}\mathbb{K} = 0$, welche gewisse primitive p -te Einheitswurzeln besitzen. Das müssen dann nichttriviale endliche Erweiterungen der p -adischen Zahlen \mathbb{Q}_p sein.

Für alle anderen lokalen Körper mit Restklassenkörper der Charakteristik $\neq 2$ und $\neq 3$ haben wir auch die Nichtexistenz von homogenen T-Ovalen, die keine Kegelschnitte sind, nachgewiesen. Für den Fall $\text{char}\mathbb{K} = \text{char}\mathbb{F} = 3$ und $\mathbb{F} \neq GF(3)$ bleibt die Frage offen.

Insgesamt weicht die Klasse der topologischen Ovale mit transitiver Kollineationsgruppe in ultrametrischen Ebenen von den Kegelschnitten ab. Ist die Charakteristik des Restklassenkörpers von 3 verschieden, so handelt es sich bei homogenen T-Ovalen um Ovale, die aus endlich vielen Bögen von Kegelschnitten zusammengesetzt sind. Andere algebraische Kurven können in diesem Fall nicht beteiligt sein.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. Peter Plaumann, der diese Dissertation betreute, für seine Unterstützung und für viele wertvolle Anregungen in jeder Phase der Entstehung der Arbeit danken.

Mein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Karl Strambach für die Anregung zum Thema sowie zahlreiche fruchtbare Diskussionen. Bei Herrn Prof. Dr. Wolf Barth möchte ich mir für die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1	Tillmann-Ovale	19
1.1	Lokale Körper	19
1.2	Projektive und Ultrametrische Ebenen	24
1.2.1	Allgemeines	24
1.2.2	Ovale in projektiven Ebenen	26
1.3	Tillmann-Ovale mit transitiver Kollineationsgruppe	31
2	Kurven mit unendlichem Stabilisator	71
2.1	Kegelschnitte	72
2.1.1	Einführung	72
2.1.2	Der gemeinsame Stabilisator zweier Kegelschnitte über einem algebraisch abgeschlossenen Körper	79
2.1.3	Der gemeinsame Stabilisator mehrerer Kegelschnitte über einem unendlichen Körper	84
2.2	Nichtsinguläre Kurven vom Grad ≥ 3	94
2.3	Kurven mit Singularitäten	95
2.3.1	Klassifikation der singulären Kurven mit unendlichem Stabilisator über einem algebraisch abgeschlossenen Körper	95
2.3.2	Der gemeinsame Stabilisator mehrerer Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper	132
2.3.3	Kurven mit unendlichem Stabilisator über unendlichen Körpern	137
	<i>Bezeichnungsindex</i>	<i>153</i>
	<i>Liste der Sätze, Hilfssätze, Bemerkungen und Definitionen</i>	<i>155</i>
	<i>Literaturverzeichnis</i>	<i>157</i>

Abbildungsverzeichnis

1.1	Kästchenmodell der endlichen affinen Ebene	26
1.2	Zwei Geraden in der ultrametrischen Ebene und ihr Bild in der endlichen Ebene .	27
1.3	Zusammengesetztes Oval in der ultrametrischen Ebene und sein Bild in der endlichen Ebene	28
1.4	Zusammengesetztes Oval in der ultrametrischen Ebene mit unendlicher Kollineationsgruppe	30
1.5	Reelles T-Oval	32
1.6	T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe, das aus verallgemeinerten Parabeln vom Grad 5 zusammengesetzt ist	42
1.7	T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe, das aus Kegelschnitten einer Sekantenschar zusammengesetzt ist	49
1.8	T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe, das aus Kegelschnitten einer Tangentenschar zusammengesetzt ist	52
2.1	Involutionen, die auf einem Kegelschnitt operieren	74
2.2	Der Standardkegelschnitt affin und projektiv	75
2.3	Kegelschnittscharen	78

Kapitel 1

Tillmann-Ovale

1.1 Lokale Körper

In diesem einführenden Kapitel stellen wir die für unsere geometrischen Betrachtungen relevanten Aussagen über diskret ultrametrisch bewertete Körper zusammen. Man vergleiche z.B. [9], [11] oder [13].

Die meisten der folgenden Aussagen gelten für alle Primzahlen p , auch für $p = 2$. Da in ultrametrischen Ebenen über Körpern, deren Restklassenkörper die Charakteristik $p = 2$ hat, die Geometrie der Ovale erheblich abweicht von der Situation für $p \neq 2$ und hier nicht von Interesse ist, wird $p = 2$ grundsätzlich ausgeschlossen: ES SEI IM FOLGENDEN p IMMER EINE VON 2 VERSCHIEDENE PRIMZAHL.

DEFINITION 1 Es sei \mathbb{K} ein Körper und $|\cdot|_u : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $|x|_u \geq 0$
- (2) $|x|_u = 0 \iff x = 0$
- (3) $|xy|_u = |x|_u |y|_u$
- (4) $|x + y|_u \leq \max\{|x|_u, |y|_u\}$ (ultrametrische Ungleichung)

für alle $x, y \in \mathbb{K}$.

Dann heißt das Paar $(\mathbb{K}, |\cdot|_u)$ ultrametrisch bewerteter Körper.

Die Menge $\mathbb{A} := \{x \in \mathbb{K} : |x|_u \leq 1\}$ heißt Bewertungsring von \mathbb{K} . Faktorisiert man den Ring \mathbb{A} nach seinem maximalen Ideal $\mathbb{M} := \{x \in \mathbb{K} : |x|_u < 1\}$, so erhält man den Restklassenkörper $\mathbb{F} := \mathbb{A}/\mathbb{M}$, vermittelt durch den kanonischen Homomorphismus π :

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \rightarrow & \mathbb{F} \\ x & \mapsto & x^\pi \end{array} \right\}$$

Ist \mathbb{F} endlich, so ist die durch die ultrametrische Bewertung auf \mathbb{K} gegebene Topologie lokal-kompakt, die Wertegruppe $\{|x|_u : x \in \mathbb{K}\}$ ist diskret. In diesem Fall sagt man auch, \mathbb{K} ist diskret ultrametrisch bewertet. Ist zusätzlich \mathbb{K} als metrischer Raum vollständig, so heißt \mathbb{K} ein lokaler Körper.

Hat ein lokaler Körper \mathbb{K} die Charakteristik 0, so ist $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ oder aber \mathbb{K} eine endliche algebraische Erweiterung des Körpers der p -adischen Zahlen. Solche Körper nennt man p -adische Körper. Hat ein lokaler Körper \mathbb{K} endliche Charakteristik p , so ist \mathbb{K} der Körper der Laurentreihen über einem endlichen Körper der Charakteristik p (vgl. [9], Th. 9.16, S. 577).

Unabhängig von der Charakteristik existiert ein $t \in \mathbb{A}$, so daß das von t erzeugte Ideal gleich $(t) = \mathbb{M}$ ist. Jedes $x \in \mathbb{K}$ hat dann eine Darstellung $x = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i$, $n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0, a_i \in \mathcal{R}_{\mathbb{K}}$. Dabei ist $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen von \mathbb{M} in \mathbb{A} . Für $\text{char}\mathbb{K} = p$, also $\mathbb{K} = GF(p^r)((t))$, wählt man normalerweise $\mathcal{R}_{\mathbb{K}} = GF(p^r)$, für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ ist es gängig, $\mathcal{R}_{\mathbb{K}} = \{0, \dots, p-1\}$ zu setzen und natürlich $t = p$.

Wenn nun $\mathbb{E} := \{x \in \mathbb{K} : |x|_u = 1\}$ die Menge der Einheiten in \mathbb{A} ist, hat jedes $x \in \mathbb{K}_* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ eine eindeutige Darstellung $x = t^n e$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ und ein $e \in \mathbb{E}$. Für $x = t^n e$ definiere die Ordnung $o(x)$ von x durch $o(x) := n$, für $x = 0$ sei $o(x) = \infty$. Es existiert dann eine reelle Zahl $X > 1$, so daß für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt:

$$|x|_u = \frac{1}{X^{o(x)}}$$

Für die Ordnungsfunktion gilt insbesondere:

- (1) $o(xy) = o(x) + o(y)$
- (2) $o(x+y) \geq \min\{o(x), o(y)\}$
- (3) $o(x) \neq o(y) \Rightarrow o(x+y) = \min\{o(x), o(y)\}$

Aus dem Zusammenhang wird immer klar sein, wann $o(x)$ die Ordnung eines Elements im obigen Sinne ist und wann die gruppentheoretische Ordnung gemeint ist.

DEFINITION 2 Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper und A eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{K} . Dann heißt A primitiv, wenn $A \cap \mathbb{E} \neq \emptyset$ ist und wenn A im Bewertungsring \mathbb{A} von \mathbb{K} enthalten ist.

Nun können wir das Lemma von Hensel formulieren:

SATZ 1 (Lemma von Hensel) *Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper mit Bewertungsring \mathbb{A} und Restklassenkörper \mathbb{F} der Charakteristik p . Weiter sei f ein Polynom in $\mathbb{K}[x]$, gegeben durch $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $n \in \mathbb{N}$, und $\{a_0, \dots, a_n\}$ sei primitiv. Dann ist $f(x)^\pi := \sum_{i=0}^n a_i^\pi x^i \in \mathbb{F}[x]$ vom Nullpolynom verschieden und es gilt:*

Wenn f^π eine einfache Nullstelle $x'_0 \in \mathbb{F}$ hat, hat f genau eine Nullstelle $x_0 \in \mathbb{A}$ mit $x_0^\pi = x'_0$. Es ist dann x_0 eine einfache Nullstelle von f .

Bei den geometrischen Fragen, die später bearbeitet werden, spielen – insbesondere für endliche Erweiterungen von \mathbb{Q}_p – die Einheitswurzeln von \mathbb{K} eine Rolle. Mit dem Lemma von Hensel kann man beweisen, daß ein lokaler Körper \mathbb{K} , der den Restklassenkörper $GF(q) = GF(p^r)$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl r hat, alle $(q-1)$ -ten Einheitswurzeln besitzt. Ist $\text{char}\mathbb{K} = p$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ mit Restklassenkörper \mathbb{F} , so gilt für die Menge \mathbb{E}_0 der Einheitswurzeln in \mathbb{K} :

$$\mathbb{E}_0 \cong \mathbb{F}_*$$

Für einen beliebigen lokalen Körper \mathbb{K} sei \mathbb{E}_1 die Menge der Einseinheiten,

$$\mathbb{E}_1 := \{x \in \mathbb{E} : x^\pi = 1\} = 1 + \mathbb{M}.$$

Falls $\mathbb{E}_0 \cong \mathbb{F}_*$ ist, ist $\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1 = \{1\}$. Etwas komplizierter ist es, wenn \mathbb{K} ein echter Oberkörper von \mathbb{Q}_p ist. In diesem Fall unterscheiden wir $o : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{Z}$, die Ordnungsfunktion auf \mathbb{K} und $o_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z}$, die Ordnungsfunktion auf \mathbb{Q}_p . Außerdem, wenn $\mathbb{A}, \mathbb{M}, \mathbb{E}$ etc. der Bewertungsring, das maximale Ideal, die Einheitengruppe etc. von \mathbb{K} sind, schreiben wir $\mathbb{A}_p, \mathbb{M}_p, \mathbb{E}_p$ etc. für die entsprechenden Objekte bezogen auf \mathbb{Q}_p . Für $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}_p]$ gilt dann:

$$\begin{aligned} [\mathbb{K} : \mathbb{Q}_p] &= v_{\mathbb{K}} \cdot r, \quad v_{\mathbb{K}}, r \in \mathbb{N} \\ \mathbb{F} &= GF(p^r) \\ \mathbb{F}_p &= GF(p), \quad r = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p] \\ o(p) &= v_{\mathbb{K}} \\ \forall x \in \mathbb{Q}_p \subset \mathbb{K} : o(x) &= v_{\mathbb{K}} \cdot o_p(x) \end{aligned}$$

Die Zahlen r und $v_{\mathbb{K}}$ heißen Restklassengrad und Verzweigungsindex. Für die Menge \mathbb{E}_0 der Einheitswurzeln solcher p -adischer Körper gilt:

$$\mathbb{E}_0 \cong (\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \times \mathbb{F}_*$$

Dabei ist sowohl \mathbb{E}_0 als auch $\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1$ zyklisch. Die multiplikative (gruppentheoretische) Ordnung eines jeden Elements der Menge $(\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\}$ ist eine p -Potenz. Genauer liefert der folgende Hilfssatz:

HILFSSATZ 2 (Einheitswurzeln von p -Potenzordnung in lokalen Körpern) *Es sei $p \neq 2$ eine Primzahl und \mathbb{K} ein p -adischer Körper mit $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}_p] = v_{\mathbb{K}} \cdot r$. Dann gilt:*

$$(I) \quad (\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\} \neq \emptyset \Rightarrow (p-1) | v_{\mathbb{K}}$$

(II) *Es sei $j = \frac{v_{\mathbb{K}}}{p-1} \in \mathbb{N}$ und $p = t^{v_{\mathbb{K}}} e_p$ für ein $e_p \in \mathbb{E}$. Genau dann, wenn das Polynom $f^\pi(x) := x^{p-1} + e_p^\pi \in \mathbb{F}[x]$ eine Nullstelle in \mathbb{F} hat, existiert ein $e \in \mathbb{E}$, so daß $1 + t^j e$ eine primitive p -te Einheitswurzel ist.*

Für jede p -te primitive Einheitswurzel $1 + \epsilon$ gilt dann: $o(\epsilon) = j$

(III) *Es sei $1 + t^j e$ für $j \in \mathbb{N}$ und $e \in \mathbb{E}$ eine primitive p -te Einheitswurzel in \mathbb{K} . Dann gilt für alle $1 + \epsilon \in (\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\}$:*

$$o(\epsilon) \leq j$$

Beweis:

(1) Wir beweisen (I) und (II).

(1a) Wenn es für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ eine primitive p^n -te Einheitswurzel in \mathbb{K} gibt, gibt es in \mathbb{K} auch eine primitive p -te Einheitswurzel $1 + \epsilon \in \mathbb{K}$. Für $\epsilon = t^j e, j \in \mathbb{N}, e \in \mathbb{E}$ betrachte die Gleichung

$$(1 + t^j e)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} t^{ji} e^i = 1.$$

Die Primzahl p sei gegeben durch $p = t^{v_{\mathbb{K}}} e_p$ für eine Einheit $e_p \in \mathbb{E}$. Weiter existieren für $i \in \{2, \dots, p-1\}$ wegen $o_p \left(\binom{p}{i} \right) = 1 - o_p(i) = 1$ (vgl. Bem. 3) Einheiten $\hat{e}_i \in \mathbb{E}$ mit $\binom{p}{i} = p \cdot \hat{e}_i = t^{v_{\mathbb{K}}} e_p \hat{e}_i$.

Damit hat man

$$\begin{aligned}
& (1 + t^j e)^p = 1 \\
& \Leftrightarrow pt^j e + \sum_{i=2}^{p-1} t^{v_{\mathbb{K}}} e_p \widehat{e}_i t^{ji} e^i + t^{jp} e^p = 0 \\
& \Leftrightarrow t^{j+v_{\mathbb{K}}} e e_p + \sum_{i=2}^{p-1} t^{v_{\mathbb{K}}+ji} e_p \widehat{e}_i e^i + t^{jp} e^p = 0.
\end{aligned}$$

Für $i \in \{2, \dots, p-1\}$ setze $e_i := e_p \widehat{e}_i e^i$ sowie $s_i := t^{v_{\mathbb{K}}+ji} e_i$, weiter $s_1 := t^{j+v_{\mathbb{K}}} e e_p$. Es gilt $o(s_i) > o(s_1) \forall i \in \{2, \dots, p-1\}$, denn für $i \geq 2$ ist natürlich $o(s_i) = v_{\mathbb{K}} + ji > v_{\mathbb{K}} + j = o(s_1)$. Daraus folgt schließlich $j + v_{\mathbb{K}} = jp$ und $e e_p + e^p \in \mathbb{M}$, falls $(1 + \epsilon)^p = 1$ ist. Notwendig für die Lösbarkeit der Gleichung $(1 + t^j e)^p = 1$ ist also $j(p-1) = v_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}$, daraus folgt (I).

(1b) Zusätzlich hinreichend für die Lösbarkeit der Gleichung $(1 + t^j e)^p = 1$ ist nach Hensels Lemma, daß das Polynom $f^\pi(x) = x^{p-1} + e_p^\pi$ eine Nullstelle in \mathbb{F} hat, denn es war

$$\begin{aligned}
& (1 + t^j e)^p = 1 \\
& \Leftrightarrow t^{jp} \left(e e_p + e^p + \sum_{i=2}^{p-1} t^{v_{\mathbb{K}}+ji-jp} e_p \widehat{e}_i e^i \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \widetilde{f}(x) := x e_p + x^p + \sum_{i=2}^{p-1} t^{v_{\mathbb{K}}+j(i-p)} e_p \widehat{e}_i x^i \in \mathbb{A}[x] \\
& \quad \text{hat die Nullstelle } e \in \mathbb{E} \\
& \Leftrightarrow f(x) := x^{p-1} + e_p + \sum_{i=2}^{p-1} t^{j(i-1)} e_p \widehat{e}_i x^{i-1} \in \mathbb{A}[x] \\
& \quad \text{hat die Nullstelle } e \in \mathbb{E}.
\end{aligned}$$

Da die Menge der Koeffizienten von f primitiv ist und $f(x)^\pi = x^{p-1} + e_p^\pi$ ist, liefert Hensels Lemma die Existenz einer Nullstelle $e \in \mathbb{E}$ von f , wenn f^π eine Nullstelle in \mathbb{F} hat. Denn wenn f^π eine Nullstelle in \mathbb{F} hat, ist sie von Null verschieden wegen $e_p \in \mathbb{E}$ und natürlich einfach, da $\frac{d}{dx} f^\pi \neq 0$ ist.

Wegen $(1 + t^j e)^i = 1 + it^j e + r_i, r_i \in t^{2j} \mathbb{A}$ für $i \in \{2, \dots, p-1\}$ ist jede primitive p -te Einheitswurzel von der Form $1 + \epsilon$, $o(\epsilon) = j$. Es folgt (II).

(2) Wir zeigen (III).

Es sei $j = \frac{v_{\mathbb{K}}}{p-1} \in \mathbb{N}$, weiter $k, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, e \in \mathbb{E}$ und

$$(1 + t^k e)^{p^n} = 1, (1 + t^k e)^{p^i} \neq 1 \text{ für } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Wir müssen zeigen, daß $k \leq j$ ist. Also angenommen, $k > j$.

(2a) Es ist

$$(1 + t^k e)^{p^n} = 1 \Leftrightarrow p^n t^k e + \sum_{i=2}^{p^n-1} \binom{p^n}{i} t^{ki} e^i + t^{kp^n} e^{p^n} = 0.$$

Wenn wie in (1) die Primzahl p gegeben ist durch $p = t^{v_{\mathbb{K}}} e_p$ für eine Einheit e_p , so gilt für $i \in \{1, \dots, p^n - 1\}$:

$$\binom{p^n}{i} = t^{v_{\mathbb{K}}(n-o_p(i))} e_p^{n-o_p(i)} \widehat{e}_i, \widehat{e}_i \in \mathbb{E}$$

Denn es war $o_p \left(\binom{p^n}{i} \right) = n - o_p(i)$, also existiert ein $\widehat{e}_i \in \mathbb{E}$ mit $\binom{p^n}{i} = p^{n-o_p(i)} \widehat{e}_i = (t^{v_{\mathbb{K}}} e_p)^{n-o_p(i)} \widehat{e}_i = t^{v_{\mathbb{K}}(n-o_p(i))} e_p^{n-o_p(i)} \widehat{e}_i$. Man hat dann, wenn man für $i \in \{2, \dots, p^n - 1\}$ die Einheit e_i gleich $e_i := e_p^{n-o_p(i)} \widehat{e}_i$ setzt:

$$\begin{aligned}
& (1 + t^k e)^{p^n} = 1 \\
& \Leftrightarrow t^{v_{\mathbb{K}}n+k} e_p^n e + t^{kp^n} e^{p^n} + \sum_{i=2}^{p^n-1} t^{v_{\mathbb{K}}(n-o_p(i))+ki} e_i e^i = 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Es seien nun für $i = 2, \dots, p^n - 1$ die Summanden $s_i := t^{v_{\mathbb{K}}(n - o_p(i)) + ki} e_i e^i$ und $s_1 := t^{v_{\mathbb{K}}n + k} e_p^n e$.

(2b) Es gilt: $o(s_i) > o(s_1) \forall i \in \{2, \dots, p^n - 1\}$

Es sei $I := \{2, \dots, p^n - 1\}$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
& o(s_i) > o(s_1) \quad \forall i \in I \\
\Leftrightarrow & k(i-1) - j(p-1)o_p(i) > 0 \quad \forall i \in I \\
\Leftrightarrow & k(i-1) - j(p-1)o_p(i) > 0 \quad \forall i \in I \text{ mit } p|i, \\
& \text{da für } p \nmid i \text{ gilt: } o_p(i) = 0, k(i-1) > 0 \text{ für } i \geq 2 \\
\Leftrightarrow & k(ap^l - 1) - j(p-1)l > 0 \quad \forall ap^l \in I \text{ mit } p \nmid a, l \geq 1 \\
\Leftrightarrow & k > j \frac{(p-1)l}{ap^l - 1} \quad \forall ap^l \in I \text{ mit } p \nmid a, l \geq 1 \quad (**)
\end{aligned}$$

Unter anderem mit der Bernoulliungleichung kann man nun zeigen, daß $j \geq j \frac{(p-1)l}{ap^l - 1}$ ist für alle $ap^l \in I$ mit $p \nmid a, l \geq 1$. Da laut Annahme $k > j$ ist, gilt demnach (**), also auch $o(s_i) > o(s_1) \forall i \in \{2, \dots, p^n - 1\}$.

(2c) Wegen (2b) ist dann für die Gültigkeit von (*) erforderlich, daß $o(s_1) = o(t^{kp^n} e^{p^n})$ gilt, also $v_{\mathbb{K}}n + k = kp^n$. Das ist äquivalent zu

$$j(p-1)n + k = kp^n.$$

Setze nun $k = \theta + j, \theta \in \mathbb{N}$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
j(p-1)n + k = kp^n & \Leftrightarrow j(p-1)n + \theta + j = (\theta + j)p^n \\
& \Leftrightarrow jn(p-1) = (\theta + j)(p^n - 1) \\
& \Leftrightarrow j[n(p-1) - (p^n - 1)] = \theta(p^n - 1) \\
& \Leftrightarrow 0 = \theta(p^n - 1) + j[(p^n - 1) - n(p-1)]
\end{aligned}$$

Es folgt dann wegen $\theta(p^n - 1) > 0$ und $j > 0$:

$$(p^n - 1) - n(p-1) < 0 \Leftrightarrow p^n < 1 + n(p-1)$$

Da $n \geq 2$ ist, ist das ein Widerspruch zur Bernoulliungleichung. Also kann nicht $k > j$ sein. \square

Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_3(i, \sqrt{3})$ ist z.B. $(1 + te)^3 = 1$, dabei ist $t = \sqrt{3}$, $e = \pm \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}t, i^2 = -1$.

Als nächstes betrachten wir die p -adische Ordnung von Binomialkoeffizienten.

BEMERKUNG 3 (1) In [13] wird auf Seite 70 gezeigt, daß bzgl. einer festen Primzahl $p \neq 2$ für natürliche Zahlen n gilt:

$$o_p(n!) = \frac{n - s(n)}{p-1}$$

Dabei ist $s(n)$ die Koeffizientensumme von n in p -adischer Darstellung, genauer:

$$\begin{aligned}
n &= \sum_{i=0}^k a_i p^i, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad a_i \in \{0, \dots, p-1\} \\
s(n) &:= \sum_{i=0}^k a_i
\end{aligned}$$

(2) Es gilt für $n, k, m \in \mathbb{N}$, $n \geq k$:

- (a) $o_p \left(\binom{n}{k} \right) = \frac{s(k)+s(n-k)-s(n)}{p-1}$
- (b) $o_p \left(\binom{p^m}{k} \right) = m - o_p(k) \quad \forall k \in \{1, \dots, p^m - 1\}$
- (c) $p \mid \binom{n}{k} \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\} \Leftrightarrow n = p^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$
- (d) $n = ap^m$ für ein $a \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid a \Rightarrow o_p \left(\binom{ap^m}{p^m} \right) = 0$,
insbesondere:
 $\left(o_p \left(\binom{2p^m}{k} \right) = 0, k \in \{1, \dots, 2p^m - 1\} \right) \Leftrightarrow k = p^m$

Zuletzt werfen wir noch einen Blick auf die Quadratklassen lokaler Körper. Ist die Charakteristik des Restklassenkörpers \mathbb{F} gleich $p \neq 2$, so hat \mathbb{K}_* vier Quadratklassen und $\mathbb{K}_*/\mathbb{K}_*^2$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ein geeignetes Repräsentantensystem der Quadratklassen von \mathbb{K}_* ist z.B. $\{1, a, t, ta\}$, wenn $a \in \mathbb{A}$ und $a^\pi \in \mathbb{F}_* \setminus \mathbb{F}_*^2$ ist und t wie üblich ein Erzeuger des maximalen Ideals \mathbb{M} von \mathbb{A} . Ist -1 keine Quadratzahl in \mathbb{K} , so wird a normiert zu $a = -1$. Mit Hensels Lemma folgt, daß -1 genau dann eine Quadratzahl in \mathbb{K}_* ist, wenn -1 eine Quadratzahl in \mathbb{F}_* ist. Dies wiederum ist bekanntlich äquivalent zu $4 \mid (|\mathbb{F}| - 1)$.

1.2 Projektive und Ultrametrische Ebenen

1.2.1 Allgemeines

Ist \mathbb{K} ein kommutativer Körper, so ist die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ eine Pappos-Ebene. Wir identifizieren $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit dem Quotientenraum \mathbb{K}^3/\mathbb{K} bzw. genauer, wir identifizieren $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit der Menge der Punkte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und einen Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit der Äquivalenzklasse $\mathbb{K}_* \cdot v$ eines Vektors $v \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Ein von einem Vektor $v = (w, x, y) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ repräsentierter projektiver Punkt wird dann mit $(w : x : y)$ bezeichnet.

Für zwei nichtleere Teilmengen $M, N \subseteq \mathbb{K}$ sei $(1 : M : N) = \{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in M, y \in N\}$. Analog definieren wir $(M : 1 : N)$ und $(M : N : 1)$.

Eine Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ fassen wir oft als die Menge der Punkte, die mit g inzidieren, auf. Wenn ein zweidimensionaler Unterraum $U \subset \mathbb{K}^3$ gegeben ist durch $U = \{(w, x, y) \in \mathbb{K}^3 : aw + bx + cy = 0\}$, so bezeichnen wir die von U repräsentierte projektive Gerade mit $[a : b : c]$. Für Betrachtungen in der affinen Ebene $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^2$ wird in der vorliegenden Arbeit immer die Ableitung von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ nach der Geraden $[1 : 0 : 0]$ gewählt, d.h. $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{K}\}$ wird identifiziert mit $\{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x, y \in \mathbb{K}\}$. Dann ist $[1 : 0 : 0]$ die unendlich ferne Gerade von $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$, es sei deshalb $[1 : 0 : 0] = [\infty]$.

Ist \mathbb{K} ein topologischer Körper, so tragen der Vektorraum \mathbb{K}^3 und die affine Ebene $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^2$ die entsprechende Produkttopologie. Die Topologie von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist dann die zu \mathbb{K}^3/\mathbb{K} gehörige kanonische Quotiententopologie. Das Schneiden von Geraden und das Verbinden von Punkten in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist in diesem Fall stetig.

Die volle Kollineationsgruppe von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist, wenn \mathbb{K} nichttriviale Körperautomorphismen gestattet, größer als die lineare Kollineationsgruppe $PGL_3(\mathbb{K})$ von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur die lineare Kollineationsgruppe betrachtet. Identifiziert man die $PGL_3(\mathbb{K})$ mit $GL_3(\mathbb{K})/\mathbb{K}_*$, so existiert für jede Kollineation $\gamma \in PGL_3(\mathbb{K})$ ein Repräsentant $A \in GL_3(\mathbb{K})$. Dabei entspricht die

Wirkung von A auf (Spalten-)Vektoren der Wirkung von γ auf Punkten, die durch diese Vektoren repräsentiert werden. Für Spaltenvektoren $w \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ mit $w^t = (a, b, c)$, die eine Gerade $[a : b : c]$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ repräsentieren, ist $[a : b : c]^\gamma$ durch $(A^{-1})^t w$ gegeben. Wir sagen dann, A induziert bzw. repräsentiert die Kollineation γ .

Für eine nichtleere Punktmenge $M \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ sei $G_M \leq PGL_3(\mathbb{K})$ der Stabilisator von M , also $G_M = \{\gamma \in PGL_3(\mathbb{K}) : M^\gamma = M\}$. Man sagt dann auch, G_M ist die Kollineationsgruppe von M .

Es sei nun \mathbb{K} ein lokaler Körper mit Restklassenkörper $\mathbb{F} = GF(q)$ und $\text{char}\mathbb{F} = p \neq 2$.

Für jeden Punkt $(w' : x' : y') \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ existiert eine primitive Menge $\{w, x, y\} \subset \mathbb{A}$ mit $(w : x : y) = (w' : x' : y')$. Dann ist $(w : x : y)^\pi := (w^\pi : x^\pi : y^\pi)$ ein Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$. Dasselbe gilt natürlich auch für Geraden $[a' : b' : c']$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$: Es existiert eine primitive Menge $\{a, b, c\}$ mit $[a' : b' : c'] = [a : b : c]$. Dann ist $[a : b : c]^\pi := [a^\pi : b^\pi : c^\pi]$ eine Gerade in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$. Deshalb definiert die kanonische Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}$ einen kanonischen Ebenenhomomorphismus $\pi : \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, d.h. eine Abbildung von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, die Punkte auf Punkte sowie Geraden auf Geraden abbildet und die Inzidenz erhält. Alle von π verschiedenen Homomorphismen $\mu : \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ kann man aus π und Kollineationen aus $PGL_3(\mathbb{K})$ bzw. $PGL_3(\mathbb{F})$ zusammensetzen:

Jeder von π verschiedene Homomorphismus $\mu : \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ ist als Produkt $\alpha_{\mathbb{F}} \circ \pi \circ \alpha_{\mathbb{K}}$ darstellbar für ein $\alpha_{\mathbb{K}} \in PGL_3(\mathbb{K})$ und ein $\alpha_{\mathbb{F}} \in PGL_3(\mathbb{F})$ (vgl. [16]).

Die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ über einem lokalen Körper \mathbb{K} ist total unzusammenhängend und kompakt. Jede Kollineation $\gamma \in PGL_3(\mathbb{K})$ ist stetig. In diesem Fall nennen wir $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ auch eine ultrametrische Ebene. Das Fehlen des Zusammenhangs ermöglicht die Existenz von Mengen, die topologisch sowohl offen als auch abgeschlossen sind bzw. keine echten Ränder haben. Diese Tatsache ist dafür verantwortlich, daß Phänomene auftreten können, die es in kompakten zusammenhängenden projektiven Ebenen nicht gibt, wie etwa die Existenz von echten T-Ovalen mit transitiver Kollineationsgruppe (siehe Satz 4, Seite 32, zur Definition von T-Ovalen siehe Seite 31).

Die Möglichkeiten, sich in ultrametrischen Ebenen geometrische Überlegungen anhand von Bildern zu veranschaulichen, sind im Vergleich zu $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sehr eingeschränkt. Mit Hilfe des Homomorphismus $\pi : \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ gelingt es, zumindest Teilaspekte der betrachteten geometrischen Objekte visuell zugänglich zu machen.

Man kann zuerst die endliche affine Ebene $\mathcal{A}_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}^2$ durch ein Quadrat beschreiben, das aus q^2 quadratischen Kästen besteht. Die Abbildung 1.1 zeigt ein Modell für die endliche affine Ebene $\mathcal{A}_{\mathbb{F}} = (GF(5))^2$ für $\mathbb{F} = GF(5)$. Das Innere der Kästchen entspricht dabei den affinen Punkten, und in $GF(5)$ ist z.B. der Punkt $(3, 4)$ gleich dem Punkt $(-2, -1)$ gemäß den Beziehungen $3 = -2$ und $4 = -1$ im endlichen Körper.

Das π -Urbild der Einbettung $\{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : (x, y) \in \mathbb{F}\} =: (1 : \mathbb{F} : \mathbb{F})$ von $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ ist dann gleich $(1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) = \{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x, y \in \pi^{-1}(\mathbb{F})\}$. Das sind aus der Sicht von $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : (1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})\}$ alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{K}^2$, also alle Punkte, deren ultrametrischer Abstand vom Ursprung $(0, 0)$ (bzw. projektiv $(1 : 0 : 0)$) kleiner oder gleich 1 ist, denn es ist dieser Abstand gleich $|(x, y)|_u = \max\{|x|_u, |y|_u\}$. Alle Punkte außerhalb von $(1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ werden durch π auf die unendlich ferne Gerade $[\infty]$ von $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ abgebildet.

Der Homomorphismus π definiert auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ eine Partition in $q^2 + q + 1$ paarweise disjunkte offen-

(3, 2)	(4, 2)	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)
(3, 1)	(4, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)
(3, 0)	(4, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)
(3, 4)	(4, 4)	(0, 4)	(1, 4)	(2, 4)
(3, 3)	(4, 3)	(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)

(-2, 2)	(-1, 2)	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)
(-2, 1)	(-1, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)
(-2, 0)	(-1, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)
(-2, -1)	(-1, -1)	(0, -1)	(1, -1)	(2, -1)
(-2, -2)	(-1, -2)	(0, -2)	(1, -2)	(2, -2)

Abbildung 1.1: *Kästchenmodell der affinen Ebene $(GF(5))^2$*

abgeschlossene Mengen, nämlich die π -Urbilder der Punkte von $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$.

Für geometrische Objekte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ kann man dann ihren Schnitt mit $(1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ zeichnerisch z.B. wie in Abbildung 1.2 für $\mathbb{F} = GF(3)$ veranschaulichen. Man beachte dabei, daß die Ränder der Kästen keine Punkte von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ enthalten, da die Urbilder von Punkten aus $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ offen-abgeschlossene Mengen sind. In dieser Zeichnung sind g und h irgendwelche Geraden in $\mathcal{P}_2(\mathbb{Q}_3)$ mit $g^\pi = [0 : 0 : 1]$, $h^\pi = [1 : 1 : 0]$.

1.2.2 Ovale in projektiven Ebenen

Es sei \mathcal{O} eine nichtleere Menge von Punkten in der projektiven Ebene, für die gilt:

- (I) Jede Gerade trifft \mathcal{O} in höchstens zwei Punkten.
- (II) Zu jedem Punkt $P \in \mathcal{O}$ gibt es genau eine Gerade T , die \mathcal{O} nur im Punkt P trifft, die sogenannte Tangente.

Dann heißt \mathcal{O} Oval.

In Pappos-Ebenen sind die bekanntesten Vertreter von Ovalen die (nichtleeren, nichtentarteten) Kegelschnitte. Betrachtet man Ovale in topologischen Ebenen, so interessiert man sich insbesondere für abgeschlossene, stetig differenzierbare Ovale. Abgeschlossene Mengen werden dabei kanonisch mit der Spurtopologie versehen.

Eine abgeschlossene Menge M von Punkten der projektiven Ebene heißt stetig differenzierbar im Punkt $P \in M$, wenn gilt:

Für alle Folgen von Punktepaaren¹ $(Q_i, R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $Q_i \neq R_i \forall i \in \mathbb{N}$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i = P$ existiert der Grenzwert $g = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i$ der Verbindungsgeraden $g_i := Q_i \vee R_i$.

Die Menge M ist stetig differenzierbar, wenn M in jedem ihrer Punkte stetig differenzierbar ist. Ist ein abgeschlossenes Oval \mathcal{O} stetig differenzierbar, so ist für eine Folge wie oben mit $P \in \mathcal{O}$ die Gerade g gleich der Tangente im Punkt P .

¹In kompakten zusammenhängenden topologischen Ebenen kann man die stetige Differenzierbarkeit durch eine schwächere Bedingung charakterisieren.

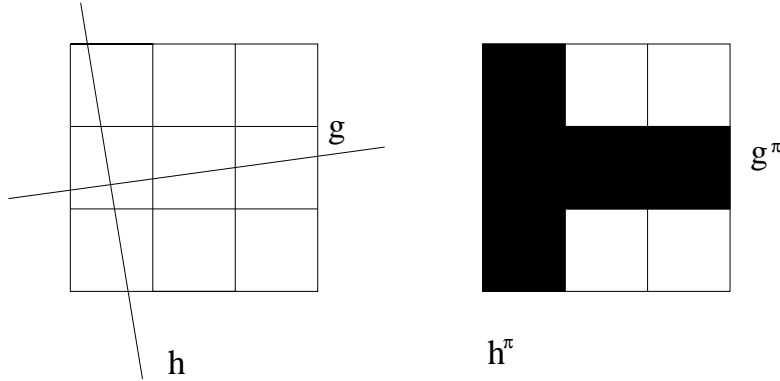


Abbildung 1.2: Zwei Geraden in $\mathcal{P}_2(\mathbb{Q}_3)$ (links) und ihr π -Bild in $\mathcal{P}_2(GF(3))$ (rechts).

Ist eine topologische Ebene endlichdimensional, kompakt und zusammenhängend, so ist jedes abgeschlossene Oval auch differenzierbar (vgl. [4]). Eine analoge Aussage für ultrametrische Ebenen ist bisher nicht bekannt.

Für die komplexe projektive Ebene mit der kanonischen Topologie kann man beweisen, daß jedes abgeschlossene Oval ein Kegelschnitt ist, d.h. die Nullstellenmenge eines irreduziblen homogenen Polynoms $F \in \mathbb{C}[w, x, y]$ vom Grad 2 (vgl. [3]). Für $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gilt das natürlich nicht.

Ist $\mathbb{F} = GF(q)$ ein endlicher Körper der Charakteristik $p \neq 2$, so besagt der Satz von Segre, daß jedes Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ ein Kegelschnitt ist (vgl. [14]). Jeder Kegelschnitt besteht dann aus $q+1$ Punkten.

Von nun an sei \mathbb{K} ein lokaler Körper mit Restklassenkörper \mathbb{F} der Charakteristik $\neq 2$.

In ultrametrischen Ebenen sind bisher zwei Typen von abgeschlossenen, stetig differenzierbaren Ovalen, die keine Kegelschnitte sind, bekannt. Einerseits algebraische Kurven höheren Grades, andererseits Ovale, die aus Stücken verschiedener algebraischer Kurven zusammengesetzt sind (vgl. [16]).

BEISPIEL (vgl. Abbildung 1.3): Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_3$ seien $K_1 := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : w^2 - x^2 - y^2 = 0\}$ und $K_2 := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : w^2 - 4x^2 - y^2 = 0\}$ zwei Kegelschnitte. Weiter seien

$$B_1 := \{P \in K_1 : P^\pi \in \{(1 : 0 : 1), (1 : 0 : -1)\}\}, \quad B_2 := \{P \in K_2 : P^\pi \in \{(1 : 1 : 0), (1 : -1 : 0)\}\}.$$

Dann ist $\mathcal{O} := B_1 \cup B_2$ ein abgeschlossenes, stetig differenzierbares Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{Q}_3)$.

Im Beispiel von Abbildung 1.3 ist $\mathcal{O}^\pi = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : w^2 - x^2 - y^2 = 0\}$ ein Oval. Die möglichen homomorphen Bilder von abgeschlossenen, stetig differenzierbaren Ovalen wurden von Tillmann klassifiziert:

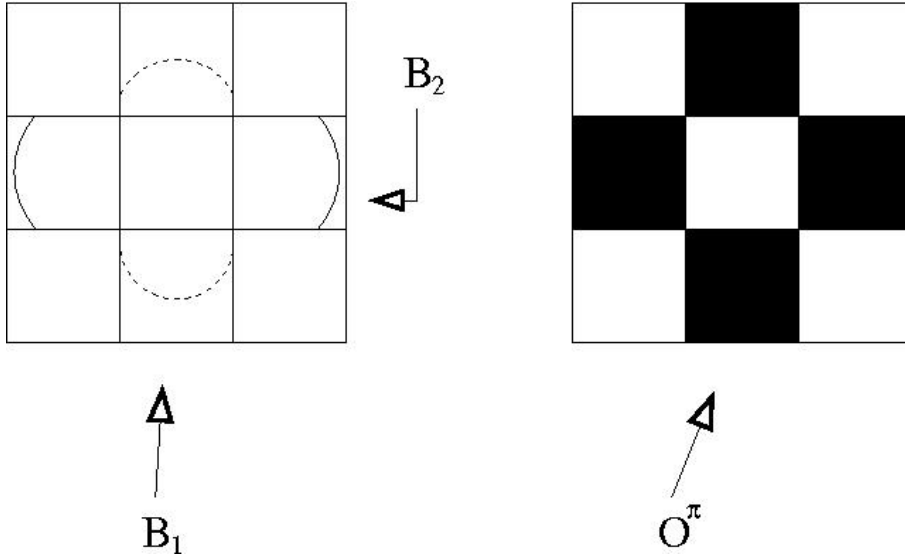


Abbildung 1.3: Zusammengesetztes Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{Q}_3)$ (links) und sein π -Bild in $\mathcal{P}_2(\text{GF}(3))$ (rechts).

SATZ 3 (Tillmann [16]) *Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper mit Restklassenkörper \mathbb{F} der Charakteristik $\neq 2$ und \mathcal{O} eine nichtleere abgeschlossene Menge von Punkten in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, die nicht in zwei Geraden enthalten ist. Dann ist äquivalent:*

- (I) *Die Menge \mathcal{O} ist ein stetig differenzierbares Oval.*
- (II) *Für jeden Homomorphismus $\mu : \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ gilt einer der folgenden Fälle:*
 - (a) *\mathcal{O}^μ ist ein Oval.*
 - (b) *\mathcal{O}^μ besteht aus zwei Geraden.*
 - (c) *\mathcal{O}^μ besteht aus zwei Geraden, ausgenommen deren Schnittpunkt.*
 - (d) *\mathcal{O}^μ ist in einer Geraden enthalten.*

BEMERKUNG und DEFINITION 4 (1) Stetig differenzierbare Ovale können keine isolierten Punkte enthalten ([16], Bemerkung 16).

(2) Es sei das Oval \mathcal{O} abgeschlossen und stetig differenzierbar und auch \mathcal{O}^π sei ein Oval, also ein Kegelschnitt. Weiter sei P ein Punkt auf \mathcal{O} und $T_P^\mathcal{O}$ die Tangente durch P an \mathcal{O} . Die Gerade $T_{P^\pi}^{\mathcal{O}^\pi}$ sei die Tangente durch den Punkt P^π an den Kegelschnitt \mathcal{O}^π . Dann gilt:

- $(T_P^\mathcal{O})^\pi = T_{P^\pi}^{\mathcal{O}^\pi}$
- Für jede Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit $P^\pi \in g^\pi$, $g^\pi \neq T_{P^\pi}^{\mathcal{O}^\pi}$ gilt:

$$|g \cap (P^\pi)^{\pi^{-1}} \cap \mathcal{O}| = 1,$$

d.h. jede Gerade g , die die offen-abgeschlossene Menge $(P^\pi)^{\pi^{-1}}$ trifft und nicht im Urbild von $T_{P^\pi}^{\mathcal{O}^\pi}$ liegt, trifft das Oval \mathcal{O} innerhalb des Urbildes² von P^π genau einmal.

²Das Urbild des Bildes P^π eines Punktes P aus $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist in diesem Sinne nicht der Punkt P , sondern die Menge aller Punkte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, die dasselbe Bild haben wie P .

(3) Wenn \mathcal{O} ein abgeschlossenes, stetig differenzierbares Oval ist und $\mathcal{O}^\pi = h \cup l$ bzw. $\mathcal{O}^\pi = h \cup l \setminus h \cap l$ für zwei Geraden h, l in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, so gilt für jeden Punkt $P \in \mathcal{O}$, dessen Bild P^π etwa auf h liegt und der verschieden von $h \cap l$ ist:

- Das π -Bild der Tangente $T_P^\mathcal{O}$ durch P an \mathcal{O} ist gleich der Geraden h .
- Für jede Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit $P^\pi \in g^\pi$, $g^\pi \neq h$ gilt:

$$|g \cap (P^\pi)^{\pi^{-1}} \cap \mathcal{O}| = 1,$$

d.h. jede Gerade, die $(P^\pi)^{\pi^{-1}}$ trifft und nicht im Urbild von h liegt, trifft das Oval \mathcal{O} innerhalb des Urbildes von P^π genau einmal.

(4) Die Bildpunkte P^π aus (2) und (3) nennen wir regulär. Dieser Begriff ist der Arbeit von Tillmann [16] entnommen. Dort ist er aber sehr viel allgemeiner gefaßt.

Ist \mathcal{O} ein abgeschlossenes, stetig differenzierbares Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und \mathcal{O}^π ein Oval, so ist jeder Punkt ein regulärer Punkt. Ist $\mathcal{O}^\pi = h \cup l$ oder $\mathcal{O}^\pi = h \cup l \setminus h \cap l$ für zwei Geraden h, l in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, so ist jeder von $h \cap l$ verschiedene Punkt auf \mathcal{O}^π ein regulärer Punkt (vgl. [16], Bemerkung 14).

(5) Wenn \mathcal{O} ein abgeschlossenes, stetig differenzierbares Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist, existiert ein Homomorphismus $\mu : \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, so daß \mathcal{O}^μ ein Oval ist (vgl. [16], Hilfssatz 23).

Eine Konsequenz von (5) ist zum Beispiel, daß die Tangenten eines stetig differenzierbaren Ovals sich nicht in drei oder weniger Punkten treffen können:

Angenommen, doch. Es sei $\mathcal{T} = \{T_P : P \in \mathcal{O}\}$ die Menge aller Tangenten T_P durch Punkte P von \mathcal{O} . Betrachte nun die Menge $\mathcal{SP} := \{T_P \cap T_{P'} : P, P' \in \mathcal{O}, P \neq P'\}$ aller Tangentenschnittpunkte. Laut Annahme ist $|\mathcal{SP}| \leq 3$, also etwa $\mathcal{SP} = \{Q, R, S\}$ für drei nicht notwendig paarweise verschiedene Punkte Q, R, S in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Nun wähle man einen Homomorphismus μ so, daß \mathcal{O}^μ ein Oval ist. Für jeden Punkt $P' \in (\mathcal{SP})^\mu$ existiert nun ein Punkt $P \in \mathcal{SP}$ mit $P^\pi = P'$. Die Anzahl der Punkte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, die auf einer Tangente des Kegelschnittes \mathcal{O}^μ liegen, ist gleich $\binom{q+1}{2}$, denn für Kegelschnitte besteht eine Bijektion zwischen den Sekanten und den äußeren³ Punkten, ihren Polen, einerseits, andererseits besteht eine Bijektion zwischen den Sekanten und den Tangentenpaaren. Deshalb ist $|(\mathcal{SP})^\mu| = \binom{q+1}{2} \geq 4$ wegen $q \neq 2$, also ist $|\mathcal{SP}| \geq 4$. Widerspruch.

Die Untergruppe $PGL_3(\mathbb{A})$ der $PGL_3(\mathbb{K})$ wird induziert von folgender Menge von Matrizen:

$$GL_3(\mathbb{A}) := \{A = (a_{ij}) \in GL_3(\mathbb{K}) : a_{ij} \in \mathbb{A} \text{ für } i, j \in \{1, 2, 3\}, \det A \in \mathbb{E}\}$$

Jede Kollineation γ aus $PGL_3(\mathbb{K})$ hat einen sogenannten primitiven Repräsentanten $A \in M_3(\mathbb{A})$. Die Matrix $A = (a_{ij})$ heißt dabei primitiv, wenn die Menge der a_{ij} primitiv ist. Wenn $A' = (a'_{ij})$ ein nichtprimitiver Repräsentant ist, so ist für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ jeder Eintrag $a'_{ij} \neq 0$ von der Form $a'_{ij} = t^{n_{ij}} e_{ij}$ für ein $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ und ein $e_{ij} \in \mathbb{E}$. Es sei $n_{i_0 j_0} = \min\{n_{ij} : i, j \in \{1, 2, 3\}\}$. Dann ist $A := t^{-n_{i_0 j_0}} \cdot A'$ auch ein Repräsentant von γ und die Menge $\{t^{-n_{i_0 j_0}} \cdot t^{n_{ij}} a'_{ij} : i, j \in \{1, 2, 3\}\}$ ist primitiv.

Über die primitiven Repräsentanten von Kollineationen aus $PGL_3(\mathbb{A})$ kann man einen kanonischen Homomorphismus $\pi : PGL_3(\mathbb{A}) \rightarrow PGL_3(\mathbb{F})$ definieren:

Es sei $A = (a_{ij}) \in GL_3(\mathbb{A})$. Dann ist die Matrix $A^\pi := ((a_{ij})^\pi)$ wohldefiniert und es gilt sogar $A^\pi \in GL_3(\mathbb{F})$ wegen $(\det A)^\pi = \det(A^\pi) \neq 0$. Wenn nun $A \in GL_3(\mathbb{A})$ die Kollineation $\gamma \in$

³Ein äußerer Punkt ist ein Punkt, der auf mindestens einer Tangente liegt.

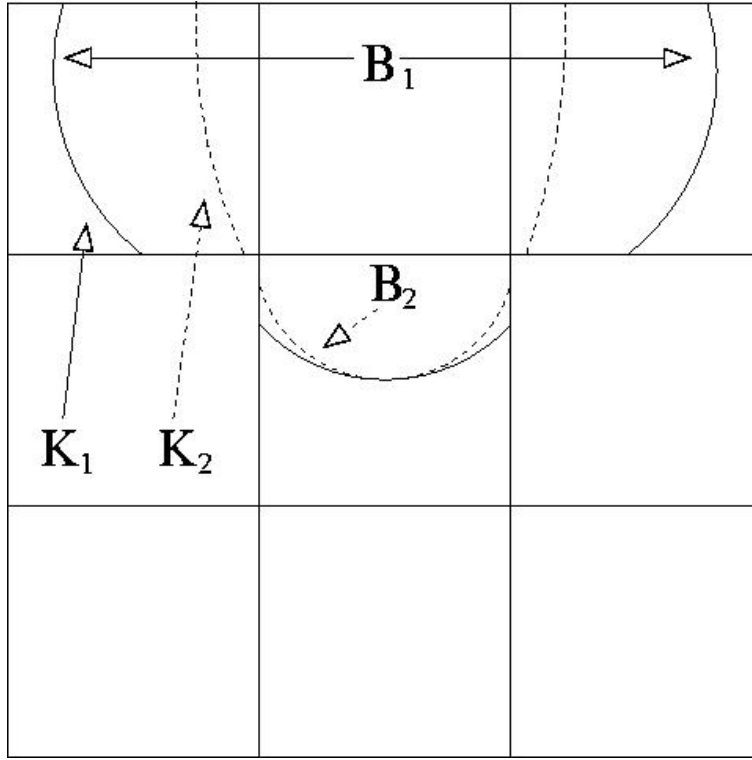


Abbildung 1.4: Zusammengesetztes Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{Q}_3)$ mit unendlicher Kollineationsgruppe.

$PGL_3(\mathbb{A})$ induziert, dann sei $\gamma^\pi \in PGL_3(\mathbb{F})$ die von $A^\pi \in GL_3(\mathbb{F})$ induzierte Kollineation. Hat eine Kollineation $\gamma \in PGL_3(\mathbb{K})$ einen Repräsentanten $A \in GL_3(\mathbb{A})$, so sagen wir, γ^π ist wohldefiniert. Für Punkte P, Q in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und eine Kollineation $\gamma \in PGL_3(\mathbb{A})$ gilt dann:

- $P^{\gamma^\pi \circ \pi} = P^{\pi \circ \gamma}$
- $P^\pi = Q^\pi \Leftrightarrow P^{\pi \circ \gamma} = Q^{\pi \circ \gamma}$

Das heißt, Kollineationen aus $PGL_3(\mathbb{A})$ respektieren die durch π auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ definierte Partition der Punktmenge von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Man kann zeigen, daß jede Kollineation aus $PGL_3(\mathbb{K}) \setminus PGL_3(\mathbb{A})$ diese Partition zerreißt.

Wenn \mathcal{O} ein stetig differenzierbares, abgeschlossenes Oval ist mit Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$, so kann man $G_{\mathcal{O}} \cap PGL_3(\mathbb{A})$ vergleichen mit $G_{\mathcal{O}^\pi} := \{\gamma \in PGL_3(\mathbb{F}) : (\mathcal{O}^\pi)^\gamma = \mathcal{O}^\pi\}$. Ist z.B. $G_{\mathcal{O}} \cap PGL_3(\mathbb{A})$ transitiv auf \mathcal{O} , so ist auch $(G_{\mathcal{O}} \cap PGL_3(\mathbb{A}))^\pi$ transitiv auf \mathcal{O}^π . In den Beweisen später gelingt es meistens, die Ovale oBdA. so zu wählen, daß $G_{\mathcal{O}} \cap PGL_3(\mathbb{A}) = G_{\mathcal{O}}$ ist. Dann hat man $(G_{\mathcal{O}})^\pi =: G_{\mathcal{O}^\pi}^\pi \leq G_{\mathcal{O}^\pi}$. Insbesondere gilt:

$$(G_{\mathcal{O}} \cap PGL_3(\mathbb{A}))^\pi \leq G_{\mathcal{O}^\pi}$$

BEISPIEL (zusammengesetztes Oval mit unendlicher Kollineationsgruppe):

Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_3$ betrachten wir folgende Mengen (vgl. Abbildung 1.4):

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2\} \\
K_2 &:= \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = 4x^2\} \\
B_1 &:= K_1 \cap (\mathcal{P}_2(\mathbb{F}) \setminus (1 : 0 : 0))^{\pi^{-1}} \\
B_2 &:= K_2 \cap (1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} \\
\mathcal{O} &:= B_1 \cup B_2
\end{aligned}$$

Der Stabilisator $G_{\mathcal{O}}$ von \mathcal{O} wird induziert von allen Matrizen der Form

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : d \in \mathbb{E} \right\},$$

d.h. $G_{\mathcal{O}}^{\pi}$ ist wohldefiniert. Es ist $\mathcal{O}^{\pi} = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : wy = x^2\}$, affin also die Normalparabel, und $G_{\mathcal{O}^{\pi}}$ ist scharf dreifach transitiv auf \mathcal{O}^{π} . Die Gruppe $G_{\mathcal{O}}^{\pi}$ ist eine echte Untergruppe von $G_{\mathcal{O}^{\pi}}$, nämlich der Normalteiler der Buekenhoutgruppe, die von allen Involutionsen mit Zentrum auf $[0 : 1 : 0]$ und Achse durch $(0 : 1 : 0)$ erzeugt wird (vgl. Def. 8, Seite 74).

Dieses Beispiel belegt, daß es in ultrametrischen Ebenen Ovale mit unendlicher Kollineationsgruppe gibt, die weder Kegelschnitte sind noch gleich oder eine Teilmenge einer anderen algebraischen Kurve. Im Allgemeinen kann man nicht erwarten, daß ein beliebiges Oval eine unendliche Kollineationsgruppe hat. Nicht einmal von einer nichttrivialen endlichen Kollineationsgruppe kann man ausgehen. Nebenbei, unser reelles Ei aus Abbildung 1.5 auf Seite 32, welches zur Hälfte aus einer Ellipse und zur Hälfte aus einem Kreis besteht, hat \mathbb{Z}_2 als Kollineationsgruppe, denn es gestattet eine Spiegelung an der waagrechten Achse.

Ist ein Oval \mathcal{O} ein Kegelschnitt, so ist $G_{\mathcal{O}}$ scharf dreifach transitiv (vgl. Satz 17). Die Frage, der wir uns nun im nächsten Kapitel zuwenden, ist die, ob es Ovale in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ gibt, die zwar keine Kegelschnitte sind, aber eine nicht nur unendliche, sondern auch auf \mathcal{O} transitive Kollineationsgruppe gestatten.

1.3 Tillmann-Ovale mit transitiver Kollineationsgruppe

GENERALVORAUSSETZUNG: ES SEI IMMER \mathbb{K} EIN LOKALER KÖRPER MIT RESTKLASSENKÖRPER $\mathbb{F} = GF(q)$, q EINE p -POTENZ UND $p \neq 2$.

Die in ultrametrischen Ebenen bekannten Beispiele abgeschlossener, stetig differenzierbarer Ovale haben alle etwas mit algebraischen Kurven zu tun. Das motiviert die folgende Definition:

DEFINITION 5 (1) Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ein abgeschlossenes, stetig differenzierbares Oval. Wenn eine algebraische Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und eine offene Menge $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ existieren, so daß

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{O} = \mathcal{U} \cap C \neq \emptyset$$

gilt, heißt \mathcal{O} Tillmann-Oval (bzgl. C) oder kurz T-Oval.

(2) Ein echtes T-Oval ist ein Oval, das kein Kegelschnitt ist.

(3) Es sei \mathcal{O} ein T-Oval und $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ eine algebraische Kurve, die auf einer offenen Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit \mathcal{O} übereinstimmt, d.h. $\mathcal{U} \cap \mathcal{O} = \mathcal{U} \cap C \neq \emptyset$. Dann sagen wir auch, daß C an \mathcal{O} beteiligt ist.

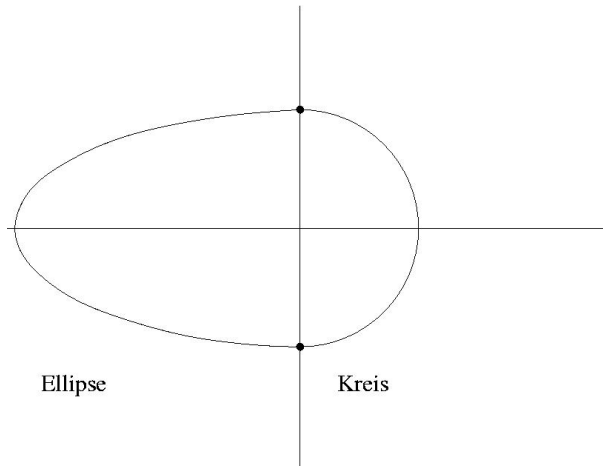


Abbildung 1.5: *Reelles T-Oval*

Die Definition eines T-Ovals kann man problemlos auf andere topologische Ebenen, etwa $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, übertragen. Ist \mathcal{O} ein T-Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, an dem zwei oder mehr Kurven beteiligt sind, so gibt es wegen des Zusammenhangs von \mathcal{O} immer sogenannte Klebepunkte, in denen die verschiedenen Kurvenstücke glatt ineinander übergehen (vgl. Abb. 1.5). Diese Klebepunkte sind Fixpunkte von \mathcal{O} und da \mathcal{O} nicht nur aus solchen Klebepunkten besteht, kann $G_{\mathcal{O}}$ nicht transitiv sein.

Ist \mathcal{O} eine ovale algebraische Kurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ mit transitiver Gruppe, so weiß man aufgrund der Resultate von Teil 2 (Abschnitt 2.3.3, insbesondere Hilfssatz 35, in Verbindung mit Hilfssatz 24), daß \mathcal{O} ein Kegelschnitt ist, denn verallgemeinerte Parabeln vom Grad ≥ 3 besitzen Singularitäten. Diese Singularitäten sind Fixpunkte von $G_{\mathcal{O}}$.

Nicht jede reelle verallgemeinerte Parabel ist ein Oval, sondern nur diejenigen, deren affine Gleichung von der Form $y = x^{2n}$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$, z.B. $\mathcal{O} = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : w^3y = x^4\}$. Hier ist die Gruppe $G_{\mathcal{O}}$ nicht transitiv, aber immerhin unendlich.

Über \mathbb{R} ist also jedes T-Oval mit transitiver Gruppe ein Kegelschnitt, das heißt, es gibt keine echten Tillmann-Ovale mit transitiver Gruppe.

In ultrametrischen Ebenen folgt aus der Transitivität der Kollineationsgruppe eines abgeschlossenen, stetig differenzierbaren Ovals \mathcal{O} im Allgemeinen nicht, daß \mathcal{O} ein Kegelschnitt ist. Dies ist das zentrale Ergebnis dieses Teils der Arbeit. Zu den im folgenden Satz auftretenden Kegelschnittscharen siehe Definition 9 sowie Satz 22.

SATZ 4 *Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper mit Restklassenkörper \mathbb{F} der Charakteristik $p \neq 2$.*

(I) *Für $\text{char}\mathbb{F} \neq 3$ gilt:*

Genau dann existiert ein echtes T-Oval $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit transitiver Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}} \leq PGL_3(\mathbb{K})$, wenn einer der folgenden Fälle zutrifft:

(a) *$4 \mid (|\mathbb{F}| - 1)$, d.h. -1 ist Quadratzahl in \mathbb{K} .*

(b) *Es existiert eine primitive p -te Einheitswurzel $1 + \epsilon \in \mathbb{K}$ und es ist $o(\epsilon) \geq 2$.*

Im Fall (a) sind die an \mathcal{O} beteiligten Kurven Kegelschnitte einer Tangentenschar. Im Fall (b) sind die an \mathcal{O} beteiligten Kurven auch Kegelschnitte, und zwar aus einer Passantenschar.

(II) Für $\text{char}\mathbb{F} = 3$ und $\text{char}\mathbb{K} = 0$ gilt:

Es existieren echte T-Ovale \mathcal{O} mit transitiver Kollineationsgruppe. Die an \mathcal{O} beteiligten Kurven sind dann entweder Kegelschnitte einer Sekantenschar oder verallgemeinerte Parabeln höheren Grades.

(III) Für $\text{char}\mathbb{F} = 3 = \text{char}\mathbb{K}$ und $\mathbb{F} = GF(3)$ gilt:

Es existieren echte T-Ovale mit transitiver Kollineationsgruppe.

(IV) Für $\text{char}\mathbb{F} = 3 = \text{char}\mathbb{K}$ und $\mathbb{F} \neq GF(3)$ gilt:

Wenn ein echtes T-Oval bzgl. einer algebraischen Kurve C mit transitiver Kollineationsgruppe existiert, dann muß C eine KV-Kurve ohne Knoten sein, deren Singularität kein \mathbb{K} -rationaler Punkt ist (vgl. Hilfssatz 33).

Für $\text{char}\mathbb{F} = \text{char}\mathbb{K} = 3$ ist es uns nicht gelungen, die Frage nach der Existenz echter T-Ovale mit transitiver Kollineationsgruppe vollständig zu lösen. Der Grund dafür ist, daß es in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ für Körper mit $\text{char}\mathbb{K} = 3$, die nicht perfekt sind, eventuell eine Klasse von Kurven – die sog. KV-Kurven – gibt, die der Ovaleigenschaft genügen. Das sind die Kurven aus Hilfssatz 33, Teil (IIb).

Diesem Sonderfall scheint man mit unseren Methoden nicht beikommen zu können. Es war weder möglich, ein Beispiel einer solchen Kurve zu finden, die tatsächlich unendlich viele Punkte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ besitzt, noch konnte widerlegt werden, daß, falls es solche Kurven gibt, sie keine Ovale sind. Gäbe es solche Kurven, die Ovale sind, hätten sie zwangsläufig eine transitive Gruppe.

Immerhin für $\mathbb{F} = GF(3)$ und $\text{char}\mathbb{K} = 3$ gibt es dieselben Positivbeispiele wie in (II), aber auch hier kann man die KV-Kurven nicht ausschließen.

Der Rest des Kapitels besteht nun aus einer Reihe von Hilfssätzen und Bemerkungen, die zusammen den Beweis des Satzes 4 bilden.

BEMERKUNG 6 (1) Ist \mathcal{O} ein T-Oval, daß auf der offenen Menge $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit der algebraischen Kurve C übereinstimmt, so ist $B := \mathcal{U} \cap \mathcal{O} = \mathcal{U} \cap C$ eine offene Menge in der Spurtopologie von \mathcal{O} .

Die Kurve C ist dabei die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ vom Grad $n \geq 2$ und F ist oBdA. irreduzibel über \mathbb{K} .

Wenn nämlich F reduzibel ist, so gibt es nichtkonstante, homogene, über \mathbb{K} irreduzible Polynome $F_i, G_j \in \mathbb{K}[w, x, y]$ mit $F = \prod_{i=1}^m F_i \prod_{j=1}^{m'} G_j$, $m, m' \in \mathbb{N}_0$, $m + m' \geq 2$, so daß gilt: Die Nullstellenmenge von G_j ist leer oder enthält nur endlich viele Punkte, die Nullstellenmenge von F_i enthält unendlich viele Punkte von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Da abgeschlossene, stetig differenzierbare Ovale keine isolierten Punkte besitzen (vgl. Bem. 4, S. 28), ist $B = \mathcal{U} \cap \mathcal{O} = \mathcal{U} \cap C$ in der Nullstellenmenge von $\prod_{j=1}^{m'} G_j$ enthalten. Man kann also annehmen $m' = 0$ bzw. $F = \prod_{i=1}^m F_i$, dabei sei C_i die Nullstellenmenge von F_i mit $|C_i| = \infty$ und C_i abgeschlossen in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Nun wähle man einen Punkt $P \in B$, der auf genau einer der Kurven, etwa C_{i_0} , liegt, also keiner der endlich vielen Schnittpunkte der beteiligten Kurven ist. Es existiert dann eine offene Umgebung $\mathcal{U}_P \subseteq \mathcal{U}$ dieses Punktes, so daß $\mathcal{U}_P \cap \mathcal{O} = \mathcal{U}_P \cap C_{i_0}$ ist. Das Oval stimmt also auf der offenen Menge \mathcal{U}_P mit der über \mathbb{K} irreduziblen Kurve C_{i_0} überein.

(2) Ist ein Oval \mathcal{O} ein T-Oval, so ist \mathcal{O} per Definition abgeschlossen und stetig differenzierbar.

(3) Ist ein Oval \mathcal{O} ein echtes T-Oval, so muß \mathcal{O} nicht aus Stücken verschiedener Kurven zusam-

mengesetzt sein. Es kann auch \mathcal{O} gleich einer oder eine Teilmenge einer algebraischen Kurve vom Grad ≥ 3 sein.

Der folgende Satz ist der erste Schritt zur Charakterisierung echter T-Ovale, an denen mehrere Kurven beteiligt sind und die eine transitive Kollineationsgruppe haben. Zu den in diesem Satz auftretenden Begriffen für imprimitive Gruppen siehe etwa [10].

HILFSSATZ 5 *Es sei \mathcal{O} ein T-Oval bzgl. der über \mathbb{K} irreduziblen algebraischen Kurve $C_1 \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Wenn \mathcal{O} nicht in C_1 enthalten ist und der Stabilisator $G_{\mathcal{O}}$ von \mathcal{O} in der $PGL_3(\mathbb{K})$ transitiv auf \mathcal{O} operiert, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geq 2$ und paarweise verschiedene, projektiv äquivalente Kurven C_1, \dots, C_m , so daß gilt:*

(I) *Es existieren bzgl. der Spurtopologie $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ von \mathcal{O} offen-abgeschlossene Mengen B_1, \dots, B_m mit*

$$\emptyset \neq B_i \subseteq \mathcal{O} \cap C_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

(II) $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^m B_i$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$.

(III) $G_{\mathcal{O}}$ operiert imprimitiv auf \mathcal{O} , die Blockstruktur ist gegeben durch B_1, \dots, B_m .

(IV) $G_{\mathcal{O}}$ operiert transitiv auf der Menge $\{C_1, \dots, C_m\}$ und hat einen Normalteiler $N_{\mathcal{O}}$ von endlichem Index. Wenn $G_{C_i} \leq PGL_3(\mathbb{K})$ der Stabilisator der Kurve C_i für $i = 1, \dots, m$ ist, gilt:

$$N_{\mathcal{O}} \leq \bigcap_{i=1}^m G_{C_i}$$

Beweis:

(1) Wir zeigen zuerst die Existenz der Kurven C_1, \dots, C_m sowie die Existenz der $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ -offenen nichtleeren Mengen $B_i \subseteq \mathcal{O} \cap C_i$ mit $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^m B_i$.

Es sei \mathcal{U} eine offene Menge in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit $\emptyset \neq \mathcal{U} \cap \mathcal{O} = \mathcal{U} \cap C_1 =: B$. Wegen der Transitivität von $G_{\mathcal{O}}$ auf \mathcal{O} gilt

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\gamma \in G_{\mathcal{O}}} B^{\gamma},$$

also ist $\{B^{\gamma} : \gamma \in G_{\mathcal{O}}\}$ eine bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ offene Überdeckung der kompakten Menge \mathcal{O} . Deshalb existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\{B^{\gamma} : \gamma \in G_{\mathcal{O}}\}$, etwa $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^k B^{\gamma_i}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dabei sei oBdA. $\gamma_i \neq \gamma_j$ sowie $B^{\gamma_i} \neq B^{\gamma_j}$ für $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$, außerdem $\gamma_1 = id$.

Wegen $B^{\gamma_i} \subset C_1^{\gamma_i}$ ist $\mathcal{O} \subset \bigcup_{i=1}^k C_1^{\gamma_i}$ und da nach Voraussetzung \mathcal{O} nicht in C_1 enthalten ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq m \leq k$, so daß gilt:

$$\{C_1^{\gamma_i} : i = 1, \dots, k\} = \{C_1, \dots, C_m\}, \quad C_1, \dots, C_m \text{ paarweise verschiedene} \\ \text{projektiv äquivalente Kurven}$$

Für $j = 1, \dots, m$ setze nun $I_j := \{i \in \{1, \dots, k\} : C_1^{\gamma_i} = C_j\}$ und

$$B_j := \bigcup_{i \in I_j} B^{\gamma_i}.$$

Jedes dieser B_j ist $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ -offen und natürlich gilt $\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^m B_j$ sowie $\mathcal{O} \subset \bigcup_{j=1}^m C_j$.

(2) Jetzt wird gezeigt: Für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ist B_i eine $\mathcal{T}_\mathcal{O}$ -abgeschlossene Menge und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Angenommen, es existieren zwei Zahlen $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ und $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Da $B_i \cap B_j \subset C_i \cap C_j$ ist und $C_i \cap C_j$ nur endlich viele Punkte enthalten kann, ist auch $B_i \cap B_j$ endlich. Sei nun $S \in B_i \cap B_j$ so ein Schnittpunkt. Aufgrund der Transitivität von $G_\mathcal{O}$ auf \mathcal{O} ist $\mathcal{O} = \bigcup_{\gamma \in G_\mathcal{O}} S^\gamma$ und es existiert eine unendliche Teilmenge M von $G_\mathcal{O}$ mit

$$B_i = \bigcup_{\gamma \in M} S^\gamma.$$

Das heißt, jeder Punkt $P \in B_i$ liegt einerseits auf C_i , andererseits auf $C_i^\gamma \cap C_j^\gamma$ für ein $\gamma \in M$, da für jeden Punkt $P \in B_i$ ein $\gamma \in M$ existiert mit $P = S^\gamma \in (C_i \cap C_j)^\gamma = C_i^\gamma \cap C_j^\gamma$. Weil C_i und C_j verschieden sind, besteht die Menge $\{C_i, C_i^\gamma, C_j^\gamma\}$ für alle $\gamma \in M$ aus mindestens zwei verschiedenen Kurven der Menge $\{C_1, \dots, C_m\}$. Es gibt also unendlich viele Punkte $P \in B_i$, die auf mindestens zwei verschiedenen Kurven der Menge $\{C_1, \dots, C_m\}$ liegen. Das kann nicht sein, denn je zwei dieser Kurven können nur endlich viele Punkte gemeinsam haben.

Wegen $B_i \cap B_j = \emptyset$ gilt für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$, daß B_i $\mathcal{T}_\mathcal{O}$ -abgeschlossen ist, da das Komplement von B_i in \mathcal{O} gleich der Menge $\bigcup_{j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}} B_j$ ist, also eine Vereinigung offener Mengen.

(3) Für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$(\mathcal{O} \cap C_j) \setminus B_j \text{ ist endlich oder leer.}$$

Wenn ein Punkt $P \in \mathcal{O}$ auf C_j , aber nicht auf B_j liegt, existiert ein $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$ mit $P \in B_i \subseteq C_i$. Dann ist $P \in C_i \cap C_j$. Da $|C_i \cap C_j|$ immer endlich ist für $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, folgt sofort, daß $(\mathcal{O} \cap C_j) \setminus B_j$ keine unendliche Menge ist.

(4) Wir zeigen, daß für alle $\gamma \in G_\mathcal{O}$ gilt:

$$B_1^\gamma \cap B_1 \neq \emptyset \Rightarrow B_1^\gamma = B_1$$

Es sei $\gamma \in G_\mathcal{O}$ mit $B_1^\gamma \cap B_1 \neq \emptyset$. Dann ist $B_1^\gamma \cap B_1$ $\mathcal{T}_\mathcal{O}$ -offen und nicht leer, enthält also unendlich viele Punkte. Wegen $B_1^\gamma \cap B_1 \subseteq C_1^\gamma \cap C_1$ ist dann auch $|C_1^\gamma \cap C_1| = \infty$. Wenn die algebraischen Kurven C_1^γ und C_1 unendlich viele Punkte gemeinsam haben, sind sie gleich, also liegt γ im Stabilisator G_{C_1} der Kurve C_1 .

Betrachte nun $B_1^\gamma \setminus B_1$. Einerseits ist diese Menge $\mathcal{T}_\mathcal{O}$ -offen, denn B_1 ist $\mathcal{T}_\mathcal{O}$ -abgeschlossen, also das Komplement von B_1 in \mathcal{O} offen. Andererseits ist $B_1^\gamma \setminus B_1$ in $(\mathcal{O} \cap C_1) \setminus B_1$ enthalten und wegen (3) endlich. Da nichtleere endliche Mengen nicht $\mathcal{T}_\mathcal{O}$ -offen sind, ist $B_1^\gamma \setminus B_1 = \emptyset$.

Analog zeigt man, daß $B_1^{\gamma^{-1}} \setminus B_1 = \emptyset$ ist, also folgt $\gamma(B_1^{\gamma^{-1}} \setminus B_1) = B_1 \setminus B_1^\gamma = \emptyset$. Insgesamt haben wir dann $B_1 = B_1^\gamma$ und damit einen Block bzw. ein Imprimitivitätsgebiet B_1 , die Gruppe operiert also imprimitiv auf \mathcal{O} .

(5) Die durch die imprimitive Wirkung von $G_\mathcal{O}$ auf \mathcal{O} induzierte Partition in Blöcke ist gegeben durch die Mengen B_1, \dots, B_m .

Betrachte $\gamma \in G_\mathcal{O}$ mit $B_1^\gamma \neq B_1$. Dann ist $B_1^\gamma \cap B_1 = \emptyset$, also $B_1^\gamma \subseteq \bigcup_{i=2}^m B_i$. Andererseits existiert ein $j \in \{2, \dots, m\}$ mit $C_1^\gamma = C_j$, d.h. $B_1^\gamma \subseteq C_j$. Betrachtet man die $\mathcal{T}_\mathcal{O}$ -offene Menge $B_1^\gamma \setminus B_j$, so ist diese wegen (3) endlich, also leer. Es ist demnach B_1^γ in B_j enthalten. Es gilt sogar $B_1^\gamma = B_j$:

Betrachte $B_j^{\gamma^{-1}} \supseteq B_1$. Die Kurve C_1 enthält $B_j^{\gamma^{-1}}$ wegen $C_j^{\gamma^{-1}} = C_1$. Da die endliche Menge $(C_1 \cap \mathcal{O}) \setminus B_1$ eine Obermenge von $B_j^{\gamma^{-1}} \setminus B_1$ ist und $B_j^{\gamma^{-1}} \setminus B_1$ $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ -offen ist, muß $B_j^{\gamma^{-1}} \setminus B_1 = \emptyset$ gelten und deshalb $B_1^{\gamma} = B_j$.

Da für jedes $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$ die Menge B_1^{γ} ebenfalls ein Block ist, haben wir eine Partition von \mathcal{O} in Blöcke B_1, \dots, B_m gefunden. Da $G_{\mathcal{O}}$ transitiv auf \mathcal{O} operiert, operiert $G_{\mathcal{O}}$ auch transitiv auf der Menge $\{B_1, \dots, B_m\}$.

(6) Wir zeigen nun (IV).

Da jeder Block B_i für $i \in \{1, \dots, m\}$ unendlich viele Punkte enthält, operiert $G_{\mathcal{O}}$ nicht nur auf $\{B_1, \dots, B_m\}$, sondern auch auf $\{C_1, \dots, C_m\}$, und zwar transitiv. Die Wirkung ist dabei natürlich gegeben wie folgt:

$$\begin{aligned} B_i^{\gamma} := B_j & \iff \exists P \in B_i \text{ mit } P^{\gamma} \in B_j & (\gamma \in G_{\mathcal{O}}) \\ C_i^{\gamma} := C_j & \iff B_i^{\gamma} = B_j & (\gamma \in G_{\mathcal{O}}) \end{aligned}$$

Da also $G_{\mathcal{O}}$ auf einer m -elementigen Menge operiert, existiert ein Homomorphismus $\varphi : G_{\mathcal{O}} \rightarrow X_m$ für eine auf $\{1, \dots, m\}$ transitive Untergruppe X_m der symmetrischen Gruppe Σ_m . Es sei $N_{\mathcal{O}}$ der Kern dieses Homomorphismus. Es ist klar, daß $[G_{\mathcal{O}} : N_{\mathcal{O}}] < \infty$ ist sowie $N_{\mathcal{O}}$ für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ im Stabilisator G_{C_i} der algebraischen Kurve C_i enthalten ist.

Also folgt $N_{\mathcal{O}} \triangleleft G_{\mathcal{O}}$, $N_{\mathcal{O}} \leq \bigcap_{i=1}^m G_{C_i}$. □

Der letzte Satz besagt, daß T-Ovale mit transitiver Gruppe aus endlich vielen Stücken B_i projektiv äquivalenter Kurven zusammengesetzt sind, diese Stücke nennen wir auch Bögen. Die Gruppe $G_{\mathcal{O}}$ permutiert diese Bögen. Der Normalteiler $N_{\mathcal{O}}$ von $G_{\mathcal{O}}$ fixiert alle Bögen extrinsisch, operiert aber intrinsisch auf ihnen.

Da \mathcal{O} unendlich viele Punkte und damit $N_{\mathcal{O}}$ unendlich viele Kollineationen enthält, ist die wichtigste Konsequenz des eben bewiesenen Satzes, daß, wenn \mathcal{O} eine transitive Gruppe hat und auf einer offenen Menge \mathcal{U} mit der algebraischen Kurve C_1 übereinstimmt, der Stabilisator G_{C_1} von C_1 innerhalb der $PGL_3(\mathbb{K})$ eine unendliche Gruppe ist. Ist \mathcal{O} nicht in C_1 enthalten, so ist \mathcal{O} in der Vereinigung endlich vieler algebraischer Kurven C_1, \dots, C_m enthalten mit $m \geq 2$ und es gilt für die Stabilisatoren G_{C_i} der Kurven C_i :

$$\left| \bigcap_{i=1}^m G_{C_i} \right| = \infty$$

Im Teil 2 der Arbeit werden diese Kurven klassifiziert.

HILFSSATZ 6 *Es sei \mathcal{O} ein T-Oval bzgl. der algebraischen Kurve $C_1 \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und C_1 sei die Nullstellenmenge des über \mathbb{K} irreduziblen homogenen Polynoms $F_1 \in \mathbb{K}[w, x, y]$ vom Grad n . Der Stabilisator $G_{\mathcal{O}} \leq PGL_3(\mathbb{K})$ von \mathcal{O} sei eine unendliche Gruppe. Dann liegt bis auf projektive Äquivalenz einer der folgenden Fälle vor:*

(I) C_1 ist ein nichtentarteter Kegelschnitt,

$$F_1(w, x, y) = wy - x^2 \quad (\text{vgl. Kapitel 2.1}).$$

(II) C_1 ist eine Translationskurve, die gleichzeitig eine VP-Kurve ist. Dann ist $\text{char}\mathbb{K} = p \geq 3$

sowie

$$F_1(w, x, y) = w^{p^N-1}y - \lambda^{p^N}x^{p^N} - \mu^{p^N}y^{p^N}, \quad p^N = n \geq 3 \text{ für ein } N \in \mathbb{N}$$

und entweder $\lambda = 1, \mu = 0$ oder $\lambda, \mu \notin \mathbb{K}$ (vgl. Hilfssatz 36).

(III) C_1 ist eine VP-Kurve, die keine Translationskurve ist,

$$F_1(w, x, y) = w^{n-k}y^k - x^n, \quad k < \frac{n}{2}, \quad (n, k) = 1, \quad n \geq 3 \text{ (vgl. Hilfssatz 35)}.$$

(IV) C_1 ist eine Translationskurve, die keine VP-Kurve ist, $\text{char}\mathbb{K} = p \geq 3$ und

$$F_1(w, x, y) = w^{p^N-1}y + \sum_{i=1}^N w^{p^N-p^i}(a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}), \quad p^N = n \geq 3, \quad N \in \mathbb{N} \text{ (vgl. Hilfssatz 34)}.$$

(V) C_1 ist eine KV-Kurve, $\text{char}\mathbb{K} = p \geq 3$ und (vgl. Hilfssatz 33)

$$F_1(w, x, y) = \sum_{i=0}^N w^{2p^N-p^i}(a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) + \frac{1}{2}b_i w^{2p^N-2p^i}x^{2p^i}, \quad 2p^N = n \geq 6 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.$$

(VI) C_1 ist eine KV-Kurve wie im Fall (IIb) des Hilfssatzes 33. Dieser Fall kann nur für $\text{char}\mathbb{K} = 3$ auftreten.

Beweis:

Satz 17 sowie die Hilfssätze 36, 35, 34 und 33 in Verbindung mit der Tatsache, daß lokale Körper von Primzahlcharakteristik nicht perfekt sind. \square

Es werden jetzt nacheinander die verschiedenen Kurventypen durchdiskutiert. Wir befassen uns zuerst mit den KV-Kurven, die über \mathbb{K} eine Normalform wie im Fall (V) des letzten Hilfssatzes besitzen.

HILFSSATZ 7 (Ovale und KV-Kurven) *Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}((t))$ ein ultrametrisch bewerteter Körper mit Restklassenkörper \mathbb{F} und $\text{char}\mathbb{F} = p \geq 3$. Es sei C_1 die Nullstellenmenge des irreduziblen Polynoms*

$$F_1(w, x, y) = \sum_{i=0}^N w^{2p^N-p^i}(a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) + \frac{1}{2}b_i w^{2p^N-2p^i}x^{2p^i}, \quad 2p^N = n \geq 6 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}$$

und G_{C_1} der Stabilisator von C_1 in der $PGL_3(\mathbb{K})$. Dann gilt:

Wenn ein abgeschlossenes, stetig differenzierbares Oval \mathcal{O} ein T-Oval bzgl. C_1 ist, operiert der Stabilisator $G_{\mathcal{O}}$ von \mathcal{O} nicht transitiv auf \mathcal{O} .

Beweis: Wir nehmen an, daß das Oval \mathcal{O} ein T-Oval bzgl. C_1 ist und daß $G_{\mathcal{O}}$ auf \mathcal{O} transitiv operiert.

(1) Man kann oBdA. $a_N = 0$ annehmen, dann ist $G_{C_1} = V \rtimes Z$ und V sowie Z werden induziert von $V', Z' \subset GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : (1 : a : b) \in C_1 \right\}, \quad Z' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : c \in \widehat{\mathbb{K}} \right\}.$$

Dabei ist $\widehat{\mathbb{K}}$ eine endliche multiplikative Untergruppe von \mathbb{K}_* (vgl. Hilfssatz 28).

(2) Zunächst wird gezeigt, daß \mathcal{O} nicht in C_1 enthalten sein kann.

Angenommen, $\mathcal{O} \subseteq C_1$. Die Singularität $S = (0 : 0 : 1)$ der Kurve C_1 kann dann kein Punkt auf \mathcal{O} sein, denn wegen $G_{\mathcal{O}} \leq G_{C_1}$ würde $S^\gamma = S$ gelten für alle $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$, ein Widerspruch zur Transitivität von $G_{\mathcal{O}}$.

Für einen Punkt $P \in \mathcal{O}$ betrachte nun die Gerade $g := P \vee S$. Man kann oBdA $P = (1 : 0 : 0)$ annehmen⁴.

Die Gerade g ist verschieden von der Tangente T_P durch P an \mathcal{O} :

Wenn $g = T_P$ ist, hat man

$$\forall \gamma \in G_{\mathcal{O}} : g^\gamma \text{ ist Ovaltangente an } P^\gamma.$$

Wegen der Transitivität von $G_{\mathcal{O}}$ auf \mathcal{O} treffen sich dann alle Tangenten des Ovals im Punkt $(0 : 0 : 1)$, das ist ein Widerspruch (vgl. S. 29). Die Gerade g ist also Sekante bzgl. \mathcal{O} . Dann gibt es einen Punkt $R \neq P$ mit $R \in g \cap \mathcal{O}$ und wegen der Transitivität von $G_{\mathcal{O}}$ findet sich eine Kollineation $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$ mit $P^\gamma = R$. Es sei $R = (1 : 0 : y)$ für ein $y \in \mathbb{K}_*$. Die Kollineation γ wird repräsentiert von einer Matrix A_γ , gegeben durch

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ b & -ac & c^2 \end{pmatrix},$$

also folgt $b = y$, $a = 0$ bzw.

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ y & 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\gamma^2(P) = (1 : 0 : y(1 + c^2))$ und wegen $y \neq 0$ ist $c^2 = -1$, denn für $c^2 \neq -1$ hätte \mathcal{O} drei kollineare Punkte. Dann enthält aber $G_{\mathcal{O}}$ die Involution γ^2 , gegeben durch

$$A_\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies widerspricht der Irreduzibilität von C_1 , denn wenn $F_1(w, x, y) \equiv F_1(w, -x, y)$ ist, folgt $a_0 = \dots = a_N$ (vgl. Definition 15).

(3) Wegen (2) erfüllt \mathcal{O} also die Voraussetzungen des Hilfssatzes 5. Für die natürliche Zahl $m \geq 2$ seien C_1, \dots, C_m die algebraischen Kurven, aus deren Stücken B_1, \dots, B_m demnach das Oval zusammengesetzt ist. Der Satz 28 in Verbindung mit Satz 33 besagt nun, daß für jedes $i \in \{2, \dots, m\}$ die Kurve C_i die Nullstellenmenge des Polynoms F_i ist mit $F_i = c_i w^n + F_1(w, x, y)$ für paarweise verschiedene c_2, \dots, c_m aus \mathbb{K} . Außerdem ist der Normalteiler $N_{\mathcal{O}}$ eine Untergruppe der Kollineationsgruppe V .

⁴Falls $P = (1 : a : b) \neq (1 : 0 : 0)$ ein Punkt auf \mathcal{O} ist, betrachte statt \mathcal{O} und P das Oval \mathcal{O}^μ und den Punkt $P^\mu = (1 : 0 : 0)$ für eine von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

induzierte Kollineation $\mu \in V$. Wegen $\mu \in G_{C_1}$ ist $\mathcal{O}^\mu \subseteq C_1$ und natürlich auch $G_{\mathcal{O}} \leq G_{C_1}$.

(4) Die Singularität S ist gemeinsame Singularität der Kurven C_1, \dots, C_m und ist deshalb fest unter $G_{\mathcal{O}}$. Es folgt $S \notin \mathcal{O}$. Es sei der Punkt $P \in B_1$, oBdA. wieder $P = (1 : 0 : 0)$ (vgl. (2)) und $g = P \vee S$.

Wir zeigen nun, daß g Tangente an \mathcal{O} im Punkt P ist.

Angenommen, g ist eine Sekante mit $g \cap \mathcal{O} \setminus \{P\} = R$, $R = (1 : 0 : y)$ für ein $y \in \mathbb{K}_*$. Da $o(\gamma) = p = \text{char}\mathbb{F} \geq 3$ ist für alle $\gamma \in V$, aber \mathcal{O} keine drei kollinearen Punkte enthält, existiert ein $\gamma \in G_{\mathcal{O}} \setminus N_{\mathcal{O}}$ mit $P^\gamma = R$. Da $G_{\mathcal{O}}$ nicht nur die Singularität S , sondern auch deren Tangente $T_S = [\infty]$ festlassen muß, wird γ induziert von einer Matrix A_γ mit

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ y & v & w \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}).$$

Es muß $(1 : 0 : y(1+w)) = \gamma^2(1 : 0 : 0)$ gleich $(1 : 0 : 0)$ sein, denn sonst hat \mathcal{O} drei kollineare Punkte, also folgt $w = -1$. Man überlegt sich weiter, daß γ im Normalisator von V enthalten und deshalb $u^2 = -1$ ist. Man rechnet aus, daß einerseits γ^2 eine Involution ist, die den Punkt $(1 : 0 : 0)$, also B_1 bzw. C_1 fixiert, andererseits aber $\gamma \notin V$ gilt. Es folgt mit (1):

$$\exists c \in \mathbb{K}_* \text{ mit } A_\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & v(u-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

Somit ist $v = 0, c = -1$. Aber (vgl. (2)) das kann nicht sein, wenn C_1 als irreduzibel vorausgesetzt wird. Also ist g Tangente an \mathcal{O} .

Weil $G_{\mathcal{O}}$ transitiv auf \mathcal{O} wirkt und den Punkt $(0 : 0 : 1)$ fixiert, inzidieren alle Tangenten g^γ an \mathcal{O} mit diesem Punkt. Das kann nicht sein (vgl. S. 29). \square

Der nächste Satz schließt die Translationskurven als Kandidaten für T-Ovale mit transitiver Gruppe aus.

HILFSSATZ 8 (Ovale und Translationskurven) *Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}((t))$ ein ultrametrisch bewerteter Körper mit Restklassenkörper \mathbb{F} und $\text{char}\mathbb{F} = p \geq 3$. Es sei C_1 die Nullstellenmenge des irreduziblen Polynoms*

$$F_1(w, x, y) = w^{p^N-1}y + \sum_{i=1}^n w^{p^N-p^i}(a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}), \quad p^N = n \geq 3 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}$$

und G_{C_1} der Stabilisator von C_1 in der $PGL_3(\mathbb{K})$. Die Kurve C_1 sei keine VP-Kurve.

Wenn ein Oval \mathcal{O} ein T-Oval bzgl. C_1 ist, dann operiert der Stabilisator $G_{\mathcal{O}}$ von \mathcal{O} nicht transitiv auf \mathcal{O} .

Beweis: Wir nehmen an, daß \mathcal{O} ein T-Oval bezüglich C_1 ist und eine auf \mathcal{O} transitive Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$ hat.

Dem Hilfssatz 34 entnimmt man, daß $G_{C_1} = V \rtimes Z$ ist, wobei V und Z induziert werden von $V', Z' \subset GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : (1 : r : s) \in C_1 \right\}, \quad Z' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{p^k} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : \lambda \in \widehat{\mathbb{K}} \right\}.$$

Dabei ist $\widehat{\mathbb{K}}$ eine endliche multiplikative Untergruppe von \mathbb{K}_* und k eine von den Koeffizienten von F_1 abhängige natürliche Zahl.

Wenn $\mathcal{O} \not\subseteq C_1$ ist, folgt aus den Hilfssätzen 31 und 34, daß $N_{\mathcal{O}} \leq V$ ist. Da V nur Elationen enthält, deren Ordnung ≥ 3 ist, ist $G_{\mathcal{O}} \cap V = id$ und damit $N_{\mathcal{O}}$ trivial. Ein Widerspruch zu $|N_{\mathcal{O}}| = \infty$ (vgl. Satz 5).

Demnach ist \mathcal{O} in C_1 enthalten, also $G_{\mathcal{O}} \leq G_{C_1}$. Auch hier muß $G_{\mathcal{O}} \cap V = id$ sein. Wegen $|G_{\mathcal{O}}| = \infty$ findet sich ein $z \in Z$ mit $|G_{\mathcal{O}} \cap Vz| = \infty$. Es sei $G_{\mathcal{O}} \cap Vz = \{v_i z : i \in I\}$ für eine geeignete Indexmenge I , weiter $i_0 \in I$ fest gewählt. Die Menge $\{v_i z (v_{i_0} z)^{-1} : i \in I\} = \{v_i v_{i_0}^{-1} : i \in I\}$ ist dann eine unendliche Teilmenge von $G_{\mathcal{O}} \cap V$, Widerspruch. \square

Nun betrachten wir VP-Kurven, die gleichzeitig Translationskurven sind.

HILFSSATZ 9 (Ovale und verallgemeinerte Parabeln, die gleichzeitig Translationskurven sind)
*Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}((t))$ ein ultrametrisch bewerteter Körper mit Restklassenkörper \mathbb{F} und $\text{char}\mathbb{F} = p \geq 3$.
 Es sei C_1 die Nullstellenmenge des irreduziblen Polynoms $F_1 \in \mathbb{K}[w, x, y]$ mit*

$$F_1(w, x, y) = w^{p^N - 1} y - \lambda^{p^N} x^{p^N} - \mu^{p^N} y^{p^N},$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ ist und entweder $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ oder $\lambda, \mu \notin \mathbb{K}$. Dann gilt:

Es gibt keine offene Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, so daß $C_1 \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ ist und C_1 auf \mathcal{U} mit einem abgeschlossenen, stetig differenzierbaren Oval \mathcal{O} übereinstimmt.

Beweis: Angenommen, es existiert eine offene Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit $\mathcal{U} \cap C_1 = \mathcal{U} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ für ein abgeschlossenes, stetig differenzierbares Oval \mathcal{O} .

(1) Wir betrachten den Fall $(\lambda, \mu) = (1, 0)$. Da G_{C_1} abgesehen von der Singularität transitiv⁵ auf C_1 operiert, kann man oBdA. annehmen, daß $P = (1 : 0 : 0)$ ein Punkt auf $\mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ ist. Es sei für ein festes $i \in \mathbb{Z}$ die Menge $\mathcal{U}_P = (1 : t^i \mathbb{A} : t^i \mathbb{A})$ eine Umgebung von P , die in \mathcal{U} enthalten ist. Dann gilt:

$$\mathcal{U}_P \cap \mathcal{O} = \{(1 : t^i a : (t^i a)^{p^N}) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : a \in \mathbb{A}\}$$

Das heißt aber, die Punkte $P_1 = (1 : t^i : t^{ip^N})$ und $P_{-1} = (1 : -t^i : -t^{ip^N})$ zusammen mit P sind drei kollineare Punkte auf \mathcal{O} . Das kann natürlich nicht sein.

(2) Für den Fall $\lambda, \mu \notin \mathbb{K}$ kann man im Prinzip genauso wie in (1) argumentieren.

Dem Beweis des Hilfssatzes 36 entnimmt man, daß die Punkte auf C_1 von der Form

$$P_x := (1 : x(1 - b) + x^{p^N} b : x^{p^N}) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$$

sind für geeignete x aus dem algebraischen Abschluß \mathbb{L} von \mathbb{K} . Dabei ist $b \notin \mathbb{K}$ und es gilt:

$$\lambda = \frac{1}{1-b}, \mu = -\frac{b}{1-b}.$$

Man kann wieder oBdA. $P = (1 : 0 : 0) \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ annehmen. Da \mathcal{O} keine isolierten Punkte enthält (vgl. Bem. 4 (1)), findet sich beliebig nahe an P immer ein Punkt $P_x \in \mathcal{O} \cap C_1$. Es existiert nun eine ganze Zahl $i \in \mathbb{Z}$, so daß die Menge $\mathcal{U}_P = (1 : t^i \mathbb{A} : t^i \mathbb{A})$ eine in \mathcal{U} enthaltene Umgebung von P ist. Für jedes $P_x \in \mathcal{U}_P$ ist auch P_{-x} ein Punkt in \mathcal{U}_P , also enthält \mathcal{O} die drei kollinearen Punkte P, P_x, P_{-x} . Widerspruch. \square

Bevor wir einen entsprechenden Hilfssatz für verallgemeinerte Parabeln formulieren, stellen wir ein Beispiel eines T-Ovals mit transitiver Kollineationsgruppe vor, das kein Kegelschnitt ist. Man vergleiche hierzu auch Abbildung 1.6.

⁵Das wird im Teil (3a) des Beweises von Hilfssatz 36 gezeigt.

HILFSSATZ 10 *Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper, der den Restklassenkörper $\mathbb{F} = GF(3)$ hat.*

Dann gibt es ein stetig differenzierbares T -Oval $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, das aus Stücken von zwei verschiedenen verallgemeinerten Parabeln zusammengesetzt ist und das eine reguläre Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$ besitzt.

Beweis:

Vorbemerkung: Um die Fälle $\text{char}\mathbb{K} = 0$ und $\text{char}\mathbb{K} = 3$ simultan betrachten zu können, verwenden wir für $\text{char}\mathbb{K} = 3$ die gängige Konvention, daß für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n = 1_{\mathbb{K}} + \dots + 1_{\mathbb{K}} \quad (n\text{-mal})$$

Dieselbe Konvention verwenden wir auch für \mathbb{F} .

(1) Wir betrachten die zwei Kurven $C_1 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : w^4y - x^5 = 0\}$ und $C_2 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : w^4y + x^5 = 0\}$. Weiter sei G die von $G' \leq GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^5 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{E}_1 \right\}$$

induzierte Untergruppe von G_{C_1} (vgl. Hilfssätze 30, 35). Außerdem seien I und J die von den Matrizen A_I bzw. A_J repräsentierten Kollineationen,

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}), \quad A_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}).$$

Setze nun $\mathcal{O} := (1 : 1 : 1)^{\langle G, I, J \rangle}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \left[C_1 \cap \left((1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} \cup (1 : -1 : -1)^{\pi^{-1}} \right) \right] \cup \left[C_2 \cap \left((1 : 1 : -1)^{\pi^{-1}} \cup (1 : -1 : 1)^{\pi^{-1}} \right) \right] \\ \mathcal{O}^{\pi} &= \{(1 : 1 : 1), (1 : 1 : -1), (1 : -1 : 1), (1 : -1 : -1)\} \\ &= \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : w^2 + x^2 + y^2 = 0\} \end{aligned}$$

Da $\mathcal{O}^{\pi} \cap [\infty] = \emptyset$ ist, gilt $\mathcal{O}^{\pi} \subseteq \{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : (x, y) \in \mathbb{F}^2\}$. In der endlichen affinen Ebene $\mathcal{A}_{\mathbb{F}} = \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 : (1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F})\}$ besteht \mathcal{O}^{π} also aus den vier Punkten $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ (vgl. Abbildung 1.6).

(2) Die Gerade $T := [4 : -5 : 1]$ ist Tangente an \mathcal{O} :

Da $T^{\pi} \cap \mathcal{O}^{\pi} = (1 : 1 : 1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ ist, folgt

$$T \cap \mathcal{O} \subset (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}}.$$

Also ist $T \cap \mathcal{O} = \{(1 : x : x^5) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{E}_1, x^5 - 5x + 4 = 0\}$. Das Polynom $x^5 - 5x + 4$ zerfällt über \mathbb{K} zu $(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)(x - 1)^2$. Für $x \in \mathbb{E}_1$ ist $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \neq 0$, denn $(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)^{\pi} = 1$. Deshalb ist $T \cap \mathcal{O} = (1 : 1 : 1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

(3) Jede Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, die durch den Punkt $(1 : 1 : 1)$ geht und nicht im π -Urbild der Gerade $[1 : 1 : 1] = T^{\pi} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ liegt, schneidet \mathcal{O} in $(1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}}$ genau einmal, und zwar in $(1 : 1 : 1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$:

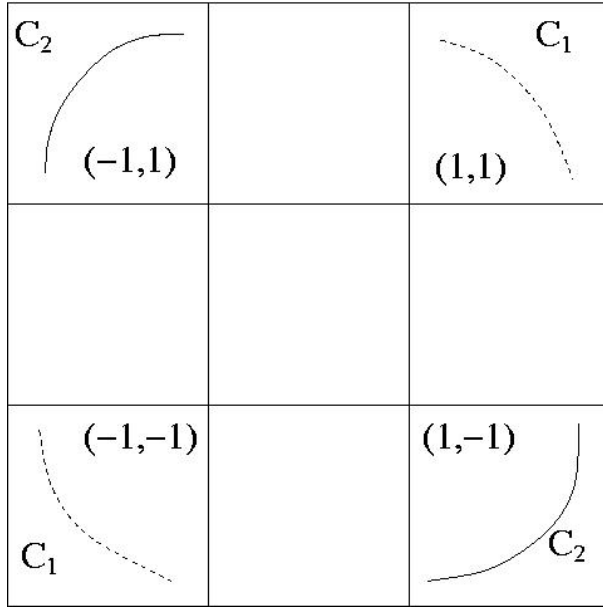


Abbildung 1.6: Das Oval \mathcal{O} aus Hilfssatz 10.

Allgemein besteht das Geradenbündel durch $(1 : 1 : 1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ aus $[1 : -1 : 0]$ und allen Geraden $[-b - 1 : b : 1]$, $b \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 [1 : -1 : 0] \cap \mathcal{O} \cap (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} &= [1 : -1 : 0] \cap C_1 \cap (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} \\
 &= \{(1 : x : x^5) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{E}_1, 1 - x = 0\} \\
 &= \{(1 : 1 : 1)\}.
 \end{aligned}$$

Für $[-b - 1 : b : 1] = g_b$ ist $g_b^\pi \neq [1 : 1 : 1]$ genau dann, wenn $b \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{E}_1$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
 [-b - 1 : b : 1] \cap \mathcal{O} \cap (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} &= [-b - 1 : b : 1] \cap C_1 \cap (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} \\
 &= \{(1 : x : x^5) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{E}_1, x^5 + bx - (1 + b) = 0\}.
 \end{aligned}$$

Es sei $f(x) = x^5 + bx - (1 + b) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + (1 + b))(x - 1)$, weiter $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + (1 + b)$. Für $b \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{A}$ und $x \in \mathbb{E}_1$ ist $h(x) \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{A}$, also $h(x) \neq 0$. Für $b \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{E}_1$ ist $b^\pi = -1$, für $x \in \mathbb{E}_1$ ist dann $(h(x))^\pi = 1$ und deshalb $h(x) \neq 0$.

Für $b \in \mathbb{M}$ und $x \in \mathbb{E}_1$ ist $(h(x))^\pi = -1$ und damit auch hier $h(x) \neq 0$. Also gilt für alle $b \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{E}_1$:

$$g_b \cap \mathcal{O} \cap (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} = \{(1 : 1 : 1)\} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$$

(4) Jede mit $(1 : 1 : 1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ inzidierende Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, die verschieden von T ist und für die $g^\pi = T^\pi$ gilt, schneidet C_1 in $(1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}}$ genau zweimal, einmal davon in $(1 : 1 : 1)$:

Es habe g die Form $g = [1 + \epsilon : -2 - \epsilon : 1]$ für $\epsilon \neq 3$, $\epsilon \in \mathbb{M}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 g \cap \mathcal{O} \cap (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} &= g \cap C_1 \cap (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} \\
 &= \{(1 : x : x^5) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{E}_1, x^5 - x(2 + \epsilon) + 1 + \epsilon = 0\}.
 \end{aligned}$$

Setze $f(x) = x^5 - x(2 + \epsilon) + 1 + \epsilon = (x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 - \epsilon)(x - 1) \in \mathbb{K}[x]$ und $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 - \epsilon \in \mathbb{K}[x]$. Es ist $h(1) = 3 - \epsilon \neq 0$ wegen $\epsilon \neq 3$. Andererseits besagt das Lemma von Hensel, daß h genau eine Nullstelle in \mathbb{E}_1 hat, denn $h^\pi(1) = 0$ und 1 ist einfache Nullstelle von

$h^\pi \in \mathbb{F}[x]$. Also hat f genau zwei verschiedene Nullstellen aus \mathbb{E}_1 . Somit gilt:

$$\left| g \cap \mathcal{O} \cap (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} \right| = 2$$

(5) Die Menge \mathcal{O} ist abgeschlossen und im Punkt $(1 : 1 : 1)$ stetig differenzierbar:

Die Abgeschlossenheit von \mathcal{O} liegt auf der Hand. Für die stetige Differenzierbarkeit betrachte zwei Punktfolgen $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$, gegeben durch $P_i = (1 : x_i : x_i^5)$ und $Q_i = (1 : y_i : y_i^5)$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 1$, $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 1$ und $x_i \neq y_i$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$. Man rechnet nach, daß der Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} (P_i \vee Q_i)$ existiert und gleich $T = [4 : -5 : 1]$ ist. Wir lassen die explizite Rechnung hier weg, sie ist nicht schwer, aber lang.

(6) Da $G_{\mathcal{O}} := \langle G, I, J \rangle$ offensichtlich scharf einfach transitiv auf \mathcal{O} operiert folgt nun aus (2) bis (5), daß \mathcal{O} ein abgeschlossenes, stetig differenzierbares T-Oval ist, das aus den Bögen B_1 und B_2 zusammengesetzt ist. Dabei ist

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1 \cap \left((1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} \cup (1 : -1 : -1)^{\pi^{-1}} \right) \subset C_1, \\ B_2 &= C_2 \cap \left((1 : 1 : -1)^{\pi^{-1}} \cup (1 : -1 : 1)^{\pi^{-1}} \right) \subset C_2 \end{aligned}$$

sowie

$$N_{\mathcal{O}} = \langle G, A_J \rangle, G_{\mathcal{O}} = \langle N_{\mathcal{O}}, A_I \rangle, G_{\mathcal{O}}/N_{\mathcal{O}} \cong \mathbb{Z}_2. \quad \square$$

In projektiven Ebenen über einem lokalen Körper \mathbb{K} , dessen Restklassenkörper \mathbb{F} verschieden von $GF(3)$ ist, gibt es keine Ovale, die ein T-Oval mit transitiver Gruppe bzgl. einer verallgemeinerten Parabel vom Grad ≥ 3 sind, wie der nächste Satz zeigt.

HILFSSATZ 11 (Ovale und verallgemeinerte Parabeln) *Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper mit Restklassenkörper \mathbb{F} der Charakteristik $p \neq 2$.*

Genau dann existiert eine irreduzible VP-Kurve C_1 vom Grad ≥ 3 und ein Oval \mathcal{O} , das bzgl. C_1 ein T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$ ist, wenn der Fall $\mathbb{F} = GF(3)$ vorliegt.

Beweis:

(1) Daß für $\mathbb{F} = GF(3)$ ein T-Oval bzgl. $C_1 := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : w^4 y - x^5 = 0\}$ mit transitiver Gruppe existiert, wurde durch das Beispiel im vorhergehenden Hilfssatz nachgewiesen. Wir nehmen also ab jetzt an, daß $\mathbb{F} \neq GF(3)$ ist und daß ein Oval \mathcal{O} und eine VP-Kurve C_1 in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ existieren, so daß \mathcal{O} ein T-Oval bzgl. C_1 ist mit transitiver Gruppe $G_{\mathcal{O}}$. Dabei sei C_1 gegeben durch das Polynom $F_1 \in \mathbb{K}[w, x, y]$ mit

$$F_1(w, x, y) = w^{n-k} y^k - x^n \quad (n, k \in \mathbb{N}, n \geq 3, k < \frac{n}{2}, \text{ggT}(n, k) = 1).$$

Wegen Hilfssatz 9 ist C_1 keine Translationskurve.

(2) Über dem algebraischen Abschluß \mathbb{L} von \mathbb{K} hat die Nullstellenmenge C_1^a von F_1 eine Parametrisierung:

$$C_1^a = \{(1 : x^k : x^n) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : x \in \mathbb{L}\} \cup \{(0 : 0 : 1)\}$$

Diese Parametrisierung besteht auch für die \mathbb{K} -rationalen Punkte von C_1^a , denn wenn $(1 : x^k : x^n) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist für $x \in \mathbb{L}$, so gilt $x^k, x^n \in \mathbb{K}$. Da k und n teilerfremd sind, existieren ganze Zahlen a und b mit $ak + bn = 1$. Es folgt $x = (x^k)^a (x^n)^b \in \mathbb{K}$, also:

$$C_1 = \{(1 : x^k : x^n) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{K}\} \cup \{(0 : 0 : 1)\}$$

Der Stabilisator G_{C_1} der Kurve C_1 wird induziert von G'_{C_1} mit

$$G'_{C_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^k & 0 \\ 0 & 0 & x^n \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{K}_* \right\} \leq GL_3(\mathbb{K}) \quad (\text{vgl. Hilfssätze 30, 35}).$$

Die Gruppe G_{C_1} operiert transitiv auf $C_1 \setminus \{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)\}$. Deshalb kann man oBdA. annehmen, daß der Punkt $P = (1 : 1 : 1)$ ein Punkt auf \mathcal{O} ist.

(3) Wir zeigen nun, daß $\mathcal{O} \cap \Delta = \emptyset$ ist für das Einheitsdreieck $\Delta = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wxy = 0\}$ und daß $G_{\mathcal{O}}$ eine Untergruppe des Stabilisators G_{Δ} des Einheitsdreiecks⁶ ist.

Falls $\mathcal{O} \subseteq C_1$ ist, ist $G_{\mathcal{O}} \leq G_{C_1}$. Da G_{C_1} die Punkte $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ fixiert und $C_1 \cap \Delta = \{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)\}$ ist, können diese beiden Punkte nicht auf \mathcal{O} liegen, sonst wäre $G_{\mathcal{O}}$ nicht transitiv.

Falls $\mathcal{O} \not\subseteq C_1$ ist, existieren nach Satz 5 endlich viele paarweise verschiedene projektiv äquivalente Kurven C_1, \dots, C_m , so daß $\mathcal{O} \subseteq \bigcup_{i=1}^m C_i$ ist und weiter gilt:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \exists \lambda \in \mathbb{K} : C_i = C(\lambda) := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : w^{n-k}y^k = \lambda x^n\}$$

Wären die Kurven C_2, \dots, C_m nicht von dieser Form, so wäre der Normalteiler $N_{\mathcal{O}}$ eine endliche Gruppe (vgl. Hilfssatz 30).

Es ist $N_{\mathcal{O}} \subseteq \bigcap_{i=1}^m G_{C_i} = G_{C_1} \leq G_{\Delta}$, aber auch $G_{\mathcal{O}} \leq G_{\Delta}$, denn für jedes $\lambda \in \mathbb{K}_*$ hat die Kurve $C(\lambda)$ die Singularität $(0 : 0 : 1)$ mit Tangente $[1 : 0 : 0]$ sowie die Singularität $(1 : 0 : 0)$ mit Tangente $[0 : 0 : 1]$ (bzw. für $k = 1$ den Wendepunkt $(1 : 0 : 0)$ mit Tangente $[0 : 0 : 1]$). Deshalb läßt $G_{\mathcal{O}}$ die Ecken von Δ punktweise fest. Da der Punkt $(1 : 1 : 1)$ auf \mathcal{O} liegt und nicht auf Δ , folgt aus der Transitivität von $G_{\mathcal{O}}$, daß $\mathcal{O} \cap \Delta = \emptyset$ ist.

(4) Nun wird gezeigt, daß $G_{\mathcal{O}}^{\pi} \leq PGL_3(\mathbb{F})$ wohldefiniert ist und daß $\mathcal{O}^{\pi} \cap \Delta^{\pi} = \emptyset$ gilt.

Es werde $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$ von der Matrix A_{γ} mit

$$A_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K})$$

repräsentiert. Betrachte die Punktfolge $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $P_i := P\gamma^i = (1 : u^i : v^i)$ für $P = (1 : 1 : 1)$. Diese Folge ist eine Folge in \mathcal{O} und da \mathcal{O} kompakt ist, muß für jede konvergente Teilfolge $(P_i)_{i \in I}$ mit $I \subseteq \mathbb{N}, |I| = \infty$ der Grenzwert ein Punkt auf \mathcal{O} sein.

Falls $|u|_u \neq |v|_u$ und $\max\{|u|_u, |v|_u\} > 1$ ist, konvergiert $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen $(0 : 1 : 0)$ bzw. $(0 : 0 : 1)$, beides Punkte nicht auf \mathcal{O} .

Falls $|u|_u \neq |v|_u$ und $\max\{|u|_u, |v|_u\} < 1$ ist, konvergiert $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen $(1 : 0 : 0) \notin \mathcal{O}$.

Falls $|u|_u \neq |v|_u$ und $\max\{|u|_u, |v|_u\} = 1$ ist, sind beide Folgen $(u^i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(v^i)_{i \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Für $|u|_u = 1$ und $|v|_u = \epsilon < 1$ betrachte eine konvergente Teilfolge von $(u^i)_{i \in \mathbb{N}}$, etwa $(u^i)_{i \in I} \rightarrow \bar{u} \in \mathbb{E}$ für eine geeignete unendliche Indexmenge $I \subseteq \mathbb{N}$. Die Punktfolge $(P_i)_{i \in I}$ konvergiert dann gegen $(1 : \bar{u} : 0) \notin \mathcal{O}$. Analog erhält man, wenn $v \in \mathbb{E}$ ist und $u \in \mathbb{M}$, eine gegen $(1 : 0 : \bar{v})$ konvergierende Teilfolge von $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wobei eine entsprechende Teilfolge von $(v^i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen \bar{v} strebt.

Falls $|u|_u = |v|_u \neq 1$ ist, gibt es eine Teilfolge von $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt der Form

⁶Mit dem *Stabilisator des Einheitsdreiecks* ist hier die Gruppe gemeint, die die drei Ecken von Δ punktweise festläßt.

$(0 : 1 : e) \notin \mathcal{O}$ für ein $e \in \mathbb{E}$ oder gegen $(1 : 0 : 0) \notin \mathcal{O}$ konvergiert.

Insgesamt ergibt sich also, daß die Kollineationen $\gamma \in \mathcal{O}$ repräsentiert werden von Matrizen A_γ mit $u, v \in \mathbb{E}$ und deshalb ist $G_{\mathcal{O}}^\pi$ wohldefiniert. Insbesondere folgt $\mathcal{O}^\pi \cap \Delta^\pi = \emptyset$, denn es ist einerseits $(1 : 1 : 1) \in \mathcal{O}^\pi$ und andererseits fixiert jede Kollineation aus $G_{\mathcal{O}}^\pi$ das Dreieck Δ^π . Also kann der Orbit von $(1 : 1 : 1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ unter $G_{\mathcal{O}}^\pi$ keinen Punkt aus Δ^π enthalten. Denn wenn $G_{\mathcal{O}}$ transitiv auf \mathcal{O} ist, ist auch $G_{\mathcal{O}}^\pi$ transitiv auf \mathcal{O}^π (vgl. S. 30).

(5) Das Oval \mathcal{O} enthält die Punkte $(1 : 1 : 1), (1 : 1 : -1), (1 : -1 : -1)$ und $(1 : -1 : 1)$.

Betrachte die Geraden $g = [1 : -1 : 0]$ und $h = [0 : -1 : 1]$ durch den Punkt $P = (1 : 1 : 1) \in \mathcal{O}$. Da sich die Tangenten an \mathcal{O} nicht in einem Punkt treffen können (vgl. S. 29), ist sowohl g als auch h eine Sekante an \mathcal{O} . Es existieren demnach Punkte $R = (1 : 1 : y) \in g$ und $S = (w : 1 : 1) \in h$ mit $R, S \in \mathcal{O}$, $y, w \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Dann existieren Kollineationen $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$ und $\delta \in G_{\mathcal{O}}$ mit $(1 : 1 : 1)^\gamma = R, (1 : 1 : 1)^\delta = S$, die induziert werden von $A_\gamma, A_\delta \in GL_3(\mathbb{K})$,

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}, \quad A_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{w} \end{pmatrix}.$$

Da $(1 : 1 : 1)^{\gamma^2} = (1 : 1 : 1)^{\delta^2} = (1 : 1 : 1)$ sein muß (sonst hätte \mathcal{O} drei kollineare Punkte), ist $y = w = -1$. Da offensichtlich C_1 nur zwei der drei Punkte P, R, S enthalten kann, folgt insbesondere $\mathcal{O} \not\subseteq C_1$.

Da $G_{\mathcal{O}}$ die Kleinsche Vierergruppe mit den Involutionen γ, δ und $\gamma\delta$ enthält, enthält \mathcal{O} auch $(1 : 1 : 1)^{\gamma\delta} = (1 : -1 : 1)$.

(6) Wir betrachten nun das Bild \mathcal{O}^π des Ovals und zeigen, daß $\mathbb{F} = GF(3)$ ist.

Wegen (5) und Satz 3 ist \mathcal{O}^π entweder ein Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ oder aber gleich der Vereinigung zweier Geraden (eventuell ohne Schnittpunkt) in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$. In einer Geraden kann \mathcal{O}^π nicht enthalten sein, denn wegen (5) enthält \mathcal{O}^π ein nichtentartetes Viereck. Wäre \mathcal{O}^π gleich der Vereinigung zweier verschiedener Geraden g_1 und g_2 in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ (eventuell ohne Schnittpunkt), so gäbe es einen Punkt auf $\mathcal{O}^\pi \cap \Delta^\pi$, da $|(g_1 \cup g_2) \cap \Delta^\pi| \geq 2$ ist. Das kann nicht sein, da in (4) gezeigt wurde, daß $\mathcal{O}^\pi \cap \Delta^\pi = \emptyset$ ist. Es folgt, daß \mathcal{O}^π ein Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ ist, also existiert ein nichtentarteter Kegelschnitt K in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ mit $\mathcal{O}^\pi = K$. Es ist dann $G_{\mathcal{O}}^\pi$ eine Untergruppe des Stabilisators G_K von K in der $PGL_3(\mathbb{F})$ und jede Kollineation aus $G_{\mathcal{O}}^\pi$ fixiert die Ecken von Δ^π punktweise. Da keine dieser Ecken auf K liegt wegen $\Delta^\pi \cap \mathcal{O}^\pi = \emptyset$, entnimmt man der Tabelle auf Seite 76, daß die nichttrivialen Kollineationen aus $G_{\mathcal{O}}^\pi$ Involutionen sein müssen. Diejenigen Involutionen in $PGL_3(\mathbb{F})$, deren Zentrum eine der Ecken von Δ^π ist und deren Achse die gegenüberliegende Seite, werden repräsentiert von

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset GL_3(\mathbb{F}).$$

Das Erzeugnis dieser Menge induziert eine Kleinsche Vierergruppe $V \leq PGL_3(\mathbb{F})$. Da $G_{\mathcal{O}}$ die Involutionen γ, δ und $\gamma\delta$ (vgl. (5)) enthält, ist $V \leq G_{\mathcal{O}}^\pi$, also insgesamt $G_{\mathcal{O}}^\pi = V$. Nun ist aber $|K| = |\mathbb{F}| + 1$ und $K = (1 : 1 : 1)^V$, also $|K| = 4$. Deshalb folgt endlich $\mathbb{F} = GF(3)$. \square

Nun betrachten wir die Kegelschnitte. Wenn an einem echten T-Oval \mathcal{O} Kegelschnitte beteiligt sind, dann sind mindestens zwei verschiedene Kegelschnitte beteiligt. Alle beteiligten Kegelschnitte entstammen einer Kegelschnittschar \mathcal{K} und der Normalteiler $N_{\mathcal{O}}$ des Stabilisators $G_{\mathcal{O}}$ von \mathcal{O}

ist eine Untergruppe der zu \mathcal{K} gehörigen Buekenhoutgruppe (vgl. Satz 22). Da es für $p \neq 2$ in lokalen Körpern vier Quadratklassen von \mathbb{K}_* gibt, in \mathbb{K} also fünf Quadratklassen, können wir uns zurückziehen auf die fünf projektiven Äquivalenzklassen solcher Scharen (vgl. Satz 22 (III) sowie in dessen Beweis Teil (4) auf Seite 92).

Für die Quadratzahl $0 \in \mathbb{K}^2$ ist \mathcal{K} die Tangentenschar, deren Kegelschnitte eine affine Gleichung der Form $y = x^2 + a$ für ein $a \in \mathbb{K}$ haben.

Für die Quadratzahl $1 \in \mathbb{K}_*^2$ ist \mathcal{K} die Sekantenschar, deren Kegelschnitte eine affine Gleichung der Form $y = ax^2$ für ein $a \in \mathbb{K}_*$ haben.

Ist α ein Repräsentant der Nichtquadratzahlen in \mathbb{K} , so ist \mathcal{K} die Passantenschar, deren Kegelschnitte eine affine Gleichung der Form $y^2 = \frac{1}{\alpha}x^2 + r$ für ein $r \in \mathbb{K}_*$ haben. Dabei ist darauf zu achten, daß nicht für jedes $r \in \mathbb{K}_*$ diese Gleichung Lösungen hat, sondern nur für $r \in (\mathbb{K}^2 - \frac{1}{\alpha}\mathbb{K}^2) \setminus \{0\}$.

Aufgrund der Bemerkungen auf Seite 24 über die Quadratklassen in \mathbb{K} ist also $\alpha \in \{a, t, ta\}$ für ein $a \in \mathbb{A}$ mit $a^\pi \in \mathbb{F}_* \setminus \mathbb{F}_*^2$. Ist $\alpha = a$, so sagen wir, \mathcal{K} ist eine Passantenschar vom Äquivalenztyp $o(\alpha) = 0$, andernfalls vom Äquivalenztyp $o(\alpha) = 1$.

Zuerst diskutieren wir Sekantenscharen.

HILFSSATZ 12 (Ovale und Kegelschnitte einer Sekantenschar) *Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper mit Restklassenkörper \mathbb{F} und $\text{char}\mathbb{F} \neq 2$. Dann gilt:*

Genau dann existiert ein echtes T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe, an dem mindestens zwei Kegelschnitte einer Sekantenschar beteiligt sind, wenn $\mathbb{F} = GF(3)$ ist.

Beweis: Wir nehmen an, daß \mathcal{O} ein echtes T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$ ist, an dem zwei oder mehr Kegelschnitte einer Sekantenschar beteiligt sind.

(1) Es sei $\Delta = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wxy = 0\}$ das Einheitsdreieck, weiter G_{Δ^\bullet} die von $G'_{\Delta^\bullet} \leq GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$G'_{\Delta^\bullet} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{K}_* \right\}$$

repräsentierte Kollineationsgruppe. Es sei S die von

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

induzierte Involution. Mit G_{Δ} bezeichnen wir hier⁷ $G_{\Delta^\bullet} \rtimes \langle S \rangle$ (bzw. $G'_{\Delta} = G'_{\Delta^\bullet} \rtimes \langle S' \rangle$).

Wenn \mathcal{O} ein T-Oval bzgl. eines Kegelschnittes ist, können wir oBdA. annehmen, daß dieser Kegelschnitt gleich dem Standardkegelschnitt $K(1) = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2\}$ ist und daß \mathcal{O} auf einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, die den Punkt $(1 : 1 : 1)$ enthält, mit $K(1)$ übereinstimmt. Es sei nun $\mathcal{K} = \{K(a) : a \in \mathbb{K}_*\}$ mit $K(a) = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = ax^2\}$ die Sekantenschar, die alle an \mathcal{O} beteiligten Kegelschnitte enthält. Die zu \mathcal{K} gehörige Buekenhoutgruppe $G_{\mathcal{K}}$ ist dann gleich $N \rtimes \langle S \rangle$, wobei N durch $N' \leq GL_3(\mathbb{K})$ gegeben ist (vgl. Satz 22 und dessen Beweis, Teil (3b)):

$$N' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{K} \right\}$$

⁷An anderer Stelle ist G_{Δ} anders definiert.

Es ist $G_{\mathcal{O}} \leq G_{\Delta}$ und, wenn man $G_{\mathcal{O}} \cap G_{\Delta \bullet} = G_{\mathcal{O} \bullet}$ setzt, ist entweder $G_{\mathcal{O}} = G_{\mathcal{O} \bullet}$ oder $G_{\mathcal{O}} = G_{\mathcal{O} \bullet} \rtimes \langle J \rangle$ für ein $J \in G_{\Delta} \setminus G_{\Delta \bullet}$ und $[G_{\mathcal{O}} : G_{\mathcal{O} \bullet}] = 2$. Wenn eine Kollineation $\gamma \in G_{\Delta \bullet} \cap G_{\mathcal{O}}$ existiert, so hat sie einen Repräsentanten $A_x \in GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ \sigma x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für ein } x \in \mathbb{K}_* \text{ und ein } \sigma \in \{\pm 1\}.$$

Wäre nämlich A_x nicht von dieser Form, so wären $(1 : 1 : 1), (1 : 1 : 1)^{\gamma^2}, (1 : 1 : 1)^{\gamma^4}$ drei verschiedene kollineare Punkte auf \mathcal{O} . Die von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

induzierte Kollineation $\gamma = \gamma(b, c)$ bildet für jedes $a \in \mathbb{K}_*$ den Kegelschnitt $K(a)$ auf $K(a)^{\gamma} = K(a \cdot \frac{c}{b^2})$ ab. Da einerseits $K(a)^{\gamma^i} = K(a \cdot (\frac{c}{b^2})^i)$ ist für $i \in \mathbb{Z}$, andererseits wegen Satz 5 nur endlich viele Kegelschnitte an \mathcal{O} beteiligt sind, folgt:

$$\gamma(b, c) \in G_{\mathcal{O}} \implies \frac{c}{b^2} \in \mathbb{E}_0$$

(2) Wir zeigen, daß \mathcal{O} die Punkte $\{(1 : \sigma : \tau) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : \sigma, \tau \in \{\pm 1\}\}$ enthält und daß $G_{\mathcal{O}}$ die Kleinsche Vierergruppe V als Untergruppe hat, wobei V repräsentiert wird von $V' \leq GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix} : \sigma, \tau \in \{\pm 1\} \right\}.$$

Es sei $g_i = (1 : 1 : 1) \vee E_i$ für die Ecken E_1, E_2, E_3 von Δ . Da wegen der Bemerkungen auf Seite 29 keine dieser drei Geraden eine Tangente an \mathcal{O} sein kann, existieren Punkte P_1, P_2, P_3 auf \mathcal{O} , so daß gilt: $P_1 = (w_0 : 1 : 1), P_2 = (1 : x_0 : 1), P_3 = (1 : 1 : y_0)$ und $w_0, x_0, y_0 \in \mathbb{K}_* \setminus \{1\}$. Dann gibt es wegen der Transitivität von $G_{\mathcal{O}}$ Kollineationen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in G_{\mathcal{O}}$, so daß $(1 : 1 : 1)^{\gamma_i} = P_i$ ist für $i = 1, 2, 3$. Eine kleine Rechnung ergibt $w_0 = x_0 = y_0 = -1$. Dabei wird benutzt, daß $(1 : 1 : 1)^{\gamma_i^2} = (1 : 1 : 1)$ ist, weil sonst \mathcal{O} mit g_i mindestens drei Schnittpunkte hat. Wenn A_i der Repräsentant von γ_i ist, ist A_i gegeben durch

$$A_1 \in \left\{ I'_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I'_1 S' \right\},$$

$$A_2 \in \left\{ I'_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I'_2 S' \right\},$$

$$A_3 \in \left\{ I'_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I'_3 S' \right\}.$$

Das Erzeugnis der Kollineationen, die durch diese sechs Matrizen gegeben sind, ist gleich $V \rtimes \langle S \rangle$. Man kann nachrechnen, daß $V \leq G_{\mathcal{O}}$ ist. Ist $A_i = I'_i S'$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$, so ist $V \rtimes \langle S \rangle \leq G_{\mathcal{O}}$ bzw. $S \in G_{\mathcal{O}}$.

Insbesondere folgt, daß der Kegelschnitt $K(-1)$ an \mathcal{O} beteiligt ist.

(3) Wir zeigen nun: $(G_{\mathcal{O} \bullet})^{\pi} =: G_{\mathcal{O} \bullet}^{\pi}$ ist wohldefiniert.

Angenommen, $G_{\mathcal{O}^\bullet}^\pi$ ist nicht wohldefiniert. Dann gibt es eine Matrix $A(b, c)$, die eine Kollineation $\gamma = \gamma(b, c) \in G_{\mathcal{O}^\bullet}$ induziert, und für $A(b, c)$ hat man

$$A(b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad b \notin \mathbb{E} \text{ oder } c \notin \mathbb{E}.$$

Für $b, c \in \mathbb{M}$ betrachte die Punktfolge $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $P_i := (1 : 1 : 1)^{\gamma^i}$. Diese Folge konvergiert gegen $(1 : 0 : 0) \notin \mathcal{O}$, d.h. $\gamma \notin G_{\mathcal{O}}$. Dieselbe Punktfolge konvergiert für $|b|_u > 1$, $|b|_u > |c|_u$ gegen $(0 : 1 : 0) \notin \mathcal{O}$, für $|c|_u > 1$, $|c|_u > |b|_u$ gegen $(0 : 0 : 1) \notin \mathcal{O}$. Für $|b|_u = |c|_u > 1$ oder $|b|_u = 1 > |c|_u$ oder $|c|_u = 1 > |b|_u$ betrachte die Folge $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $P_j := (1 : 1 : 1)^{\gamma^{-j}}$. Sie konvergiert gegen $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ oder $(0 : 1 : 0)$. Da keiner dieser drei Punkte auf \mathcal{O} liegt, ist die Annahme zum Widerspruch geführt.

(4) Falls $G_{\mathcal{O}^\pi}^\pi$ ein Element aus $(V \rtimes \langle S \rangle)^\pi \setminus V^\pi$ enthält, folgt $\mathbb{F} = GF(3)$.

Angenommen, $G_{\mathcal{O}^\pi}^\pi$ enthält ein Element aus $(V \rtimes \langle S \rangle)^\pi \setminus V^\pi$.

(4a) Es ist dann oBdA. $G_{\mathcal{O}} = G_{\mathcal{O}^\bullet} \rtimes \langle \gamma \rangle$ für ein $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$, induziert von $A_\gamma \in GL_3(\mathbb{K})$ und

$$A_\gamma \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}) : \sigma, \tau \in \{\pm 1\} \right\}.$$

Also ist $G_{\mathcal{O}^\pi}^\pi$ wohldefiniert. Weil unabhängig von σ und τ gilt

$$G_{\mathcal{O}^\pi}^\pi \geq \langle V^\pi, A_\gamma^\pi \rangle = (V \rtimes \langle S \rangle)^\pi = V^\pi \rtimes \langle S^\pi \rangle,$$

ist $G_{\mathcal{O}^\pi}^\pi = G_{\mathcal{O}^\bullet}^\pi \rtimes \langle S^\pi \rangle$. Da $G_{\mathcal{O}^\pi}^\pi$ das Dreieck Δ^π festläßt und \mathcal{O}^π die Punkte $(1 : \pm 1 : \pm 1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ enthält, muß gelten:

$$\mathcal{O}^\pi \cap \Delta^\pi = \emptyset$$

Dies impliziert, daß \mathcal{O} ein Oval ist. Wenn nämlich \mathcal{O}^π kein Oval ist, ist nach Satz 3 sonst $\mathcal{O}^\pi = g \cup h$ bzw. $\mathcal{O}^\pi = g \cup h \setminus g \cap h$ für zwei (verschiedene) Geraden g, h in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$. Da aber $|(g \cup h) \cap \Delta^\pi| \geq 2$ ist, ist $|\mathcal{O}^\pi \cap \Delta^\pi| \geq 1$, Widerspruch.

Es sei nun $Q(\mathcal{O}^\pi) \in GL_3(\mathbb{F})$ die symmetrische Matrix, die den Kegelschnitt \mathcal{O}^π repräsentiert. Wegen $V^\pi \subset G_{\mathcal{O}^\pi}^\pi$ und $S^\pi \in G_{\mathcal{O}^\pi}^\pi$ ergibt der Ansatz $(A^{-1})^t Q(\mathcal{O}^\pi) A^{-1} \equiv Q(\mathcal{O}^\pi)$ für alle Repräsentanten $A \in GL_3(\mathbb{F})$ von $V^\pi \rtimes \langle S^\pi \rangle$, daß

$$Q(\mathcal{O}^\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist für ein $d \in \mathbb{F}_*$. Wegen $\mathcal{O}^\pi \cap \Delta^\pi = \emptyset$ folgt weiter, daß -1 keine Quadratzahl ist in \mathbb{F} (also ist -1 auch keine Quadratzahl in \mathbb{K}) und daß d Quadratzahl ist. Da \mathcal{O}^π die Punkte $(1 : \pm 1 : \pm 1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ enthält, folgt $d = -2$, also

$$\mathcal{O}^\pi = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : w^2 - 2x^2 + y^2 = 0\}.$$

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $q \not\equiv 1 \pmod{4}$ ist für $\mathbb{F} = GF(q) = GF(p^n)$ und wenn $2 \notin \mathbb{F}^2$ ist.

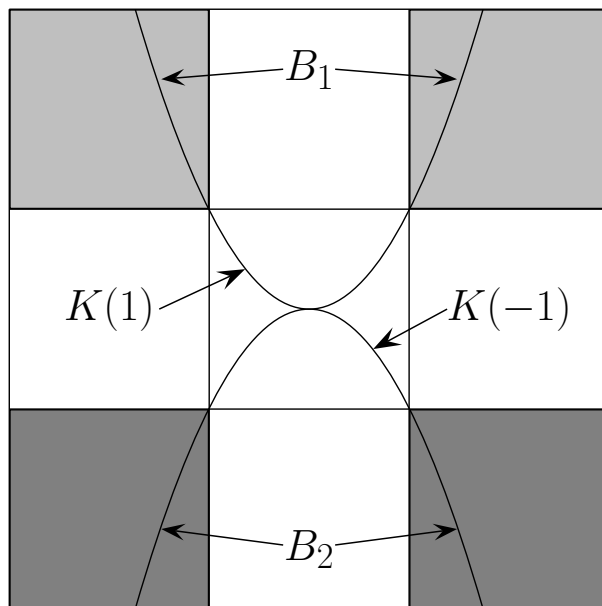


Abbildung 1.7: T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe für $\mathbb{F} = GF(3)$, zusammengesetzt aus Stücken zweier Kegelschnitte einer Sekantenschar.

(4b) Für $\mathbb{F} = GF(3)$ definiere

$$B_1 := K(1) \cap \left((1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} \cup (1 : -1 : 1)^{\pi^{-1}} \right),$$

$$B_2 := K(-1) \cap \left((1 : 1 : -1)^{\pi^{-1}} \cup (1 : -1 : -1)^{\pi^{-1}} \right).$$

Dann ist $\mathcal{O} := B_1 \cup B_2$ ein echtes T-Oval mit transitiver (aber nicht regulärer) Kollineationsgruppe (vgl. Abb. 1.7).

Es ist $\mathcal{O}^\pi = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : w^2 + x^2 + y^2 = 0\} = \{(1 : \sigma : \tau) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : \sigma, \tau \in \{\pm 1\}\}$. Weiter sei G_1 die von

$$G'_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{E}_1 \right\}$$

induzierte Kollineationsgruppe sowie $G := \langle G_1, V \rangle$. Man sieht sofort, daß $(1 : 1 : 1)^G = \mathcal{O}$ ist, also ist $G \leq G_{\mathcal{O}}$ und G operiert regulär auf \mathcal{O} . Da $S \in G_{\mathcal{O}}$ ist, ist G eine echte Untergruppe von $G_{\mathcal{O}}$, also operiert $G_{\mathcal{O}}$ nicht regulär auf \mathcal{O} . Um zu zeigen, daß \mathcal{O} ein Oval ist, genügt es wegen der Transitivität von G , das Geradenbüschel durch $(1 : 1 : 1)$ zu betrachten.

Es ist $T := [1 : -2 : 1]$ die Tangente durch $(1 : 1 : 1)$ bzgl. $K(1)$. Die Gerade T ist dann auch Tangente an \mathcal{O} , denn $T^\pi \cap \mathcal{O} = (1 : 1 : 1)$ und $|T \cap \mathcal{O} \cap (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}}| = 1$. Für alle anderen Geraden $g \neq [1 : -2 : 1]$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, die den Punkt $(1 : 1 : 1)$ enthalten, gilt $|g \cap \mathcal{O}| = 2$:

Falls $g^\pi = T^\pi$ ist und $g \neq T$, schneidet g den Kegelschnitt $K(1)$ innerhalb $(1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}}$ genau zweimal (vgl. Bem. 4(2)). Wegen $g^\pi \cap \mathcal{O}^\pi = (1 : 1 : 1)$ gilt also $|\mathcal{O} \cap g| = 2$.

Falls g^π mit $(0 : 0 : 1)$ inzidiert, schneidet g^π den Kegelschnitt \mathcal{O}^π genau in den Punkten $(1 : 1 : 1)$ und $(1 : 1 : -1)$. Andererseits schneidet g den Kegelschnitt $K(1)$ in $(1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}}$ genau einmal, da

$g^\pi \neq T^\pi$ ist (vgl. Bem. 4 (2)). Da das Bild der Tangente durch $(1 : 1 : -1) \in K(-1)$ bzgl. $K(-1)$ verschieden von g^π ist, schneidet g den Kegelschnitt $K(-1)$ in $(1 : 1 : -1)^{\pi^{-1}}$ auch genau einmal. Also ist $|g \cap \mathcal{O}| = 2$.

Falls g^π mit $(0 : 1 : 0)$ inzidiert, argumentiert man ähnlich.

Falls g^π weder mit $(0 : 1 : 0)$ noch mit $(0 : 0 : 1)$ inzidiert und $g^\pi \neq T^\pi$ ist, ist $g^\pi = [0 : -1 : 1]$ und $|g \cap B_1| = 1$. Da g^π verschieden ist von $[-1 : 1 : 1]$ (das ist die Tangente an \mathcal{O}^π im Punkt $(1 : -1 : -1)$), gilt auch $|g \cap B_2| = 1$, also ergibt sich insgesamt wegen $g \cap \mathcal{O} \subseteq (1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}} \cup (1 : -1 : -1)^{\pi^{-1}}$, daß $|g \cap \mathcal{O}| = 2$ ist für $(1 : 1 : 1) \in g$, $g \neq T$.

Das Oval \mathcal{O} ist stetig differenzierbar, denn jedes Paar von Punktfolgen $(P_i, Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $P_i \neq Q_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ sowie $P_i \rightarrow (1 : 1 : 1), Q_i \rightarrow (1 : 1 : 1)$ ist oBdA. in $(1 : 1 : 1)^{\pi^{-1}}$ enthalten und $g_i := P_i \vee Q_i$ strebt gegen die Tangente durch $(1 : 1 : 1)$ bzgl. $K(1)$, da für Kegelschnitte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ die differentialgeometrischen Tangenten mit den algebraischen Tangenten übereinstimmen.

(4c) Für $\mathbb{F} \neq GF(3)$ wird jetzt ein Widerspruch hergeleitet.

Da für $\mathbb{F} \in \{GF(5), GF(7)\}$ entweder -1 oder 2 Quadratzahl ist, enthält \mathcal{O}^π mindestens 10 Punkte. Denn weil \mathcal{O}^π nach (4a) ein Oval ist, gilt $|\mathcal{O}^\pi| = |\mathbb{F}| + 1$. Da $G_{\mathcal{O}}^\pi \leq G_{\mathcal{O}^\pi}$ ist ($G_{\mathcal{O}^\pi}$ ist der scharf dreifach transitive Stabilisator des Kegelschnittes \mathcal{O}^π in der $PGL_3(\mathbb{F})$, vgl. auch S. 30), und $G_{\mathcal{O}}^\pi$ das Dreieck Δ^π festläßt, rechnen wir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \quad (b, c \in \mathbb{F}_*) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b, c \in \mathbb{F}_*) \end{aligned}$$

Es folgt in beiden Fällen $b, c \in \{\pm 1\}$, falls die angesetzten Matrizen Kollineationen aus $G_{\mathcal{O}}^\pi$ repräsentieren. Also ist $G_{\mathcal{O}}^\pi = (V \times \langle S \rangle)^\pi$ und $|(1 : 1 : 1)^{G_{\mathcal{O}}^\pi}| = 4$. Da $G_{\mathcal{O}}^\pi$ transitiv auf \mathcal{O}^π operieren muß, wenn $G_{\mathcal{O}}$ transitiv auf \mathcal{O} wirkt, ist das ein Widerspruch zu $|\mathcal{O}^\pi| \geq 10$.

(5) Nun wird der Fall, daß $G_{\mathcal{O}}^\pi$ kein Element aus $(V \times \langle S \rangle)^\pi \setminus V^\pi$ enthält und daß $\mathbb{F} \neq GF(3)$ ist, zum Widerspruch geführt.

Angenommen, $G_{\mathcal{O}}^\pi$ enthält kein Element aus $(V \times \langle S \rangle)^\pi \setminus V^\pi$ und $\mathbb{F} \neq GF(3)$.

(5a) Es ist $G_{\mathcal{O}}^\pi$ wohldefiniert:

Angenommen, es existiert ein $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$, so daß γ^π nicht definiert ist. Wegen (3) ist dann $\gamma \in G_{\mathcal{O}} \setminus G_{\mathcal{O}^\pi}$, es existiert also (vgl. (1)) ein $x \in \mathbb{K}_* \setminus \mathbb{E}$ und ein $\sigma \in \{\pm 1\}$, so daß

$$A_x := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ \sigma x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Kollineation γ induziert. Ist $|x|_u > 1$ (bzw. $|x|_u < 1$), so enthält \mathcal{O} den Punkt $(1 : 1 : 1)^\gamma = (1 : x : \sigma x^2)$, also \mathcal{O}^π den Punkt $(0 : 0 : 1)$ (bzw. $(1 : 0 : 0)$). Wegen $(1 : \pm 1 : \pm 1) \in \mathcal{O}^\pi$ und Satz 3 ist dann $\mathcal{O}^\pi = [1 : -1 : 0] \cup [1 : 1 : 0]$ (bzw. $\mathcal{O}^\pi = [0 : -1 : 1] \cup [0 : 1 : 1]$). Die Tangente T an \mathcal{O} in $(1 : 1 : 1)$ ist gleich der Tangente an $K(1)$ in $(1 : 1 : 1)$, also $T = [1 : -2 : 1]$. Es muß aber T^π eine der Geraden sein, aus denen \mathcal{O}^π besteht, denn $(1 : 1 : 1)$ ist nicht der Schnittpunkt

der entsprechenden Geraden (vgl. Bem. 4 (3)). Widerspruch.
 Also ist $|x|_u = 1$ und deshalb $G_{\mathcal{O}}^{\pi}$ wohldefiniert.

(5b) Analog wie in (4) erhält man, daß \mathcal{O}^{π} ein Kegelschnitt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ ist mit Matrix $Q(\mathcal{O}^{\pi})$,

$$Q(\mathcal{O}^{\pi}) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ebenso hat man $\mathcal{O}^{\pi} \cap \Delta^{\pi} = \emptyset$. Wie in (4c) rechnet man nach, daß für jede von einer Diagonalmatrix $D \in GL_3(\mathbb{F})$ induzierte Kollineation $\gamma_D \in PGL_3(\mathbb{F})$ gilt:

$$\gamma_D \in G_{\mathcal{O}^{\pi}} \implies \gamma_D \in V^{\pi}$$

Wenn also $\gamma \in G_{\mathcal{O}^{\bullet}}$ ist, ist $\gamma^{\pi} = \gamma_D \in V^{\pi}$ für eine Diagonalmatrix $D \in GL_3(\mathbb{F})$, denn es ist $G_{\mathcal{O}}^{\pi} \leq G_{\mathcal{O}^{\pi}}$. Das heißt, $G_{\mathcal{O}^{\bullet}}^{\pi} = V^{\pi}$.

Ist $G_{\mathcal{O}} = G_{\mathcal{O}^{\bullet}}$, so folgt $\mathbb{F} = GF(3)$, denn $|\mathcal{O}^{\pi}| = |(1 : 1 : 1)^{G_{\mathcal{O}}^{\pi}}| = |G_{\mathcal{O}}^{\pi}| = 4$. Ein Widerspruch zur Annahme. Ist $G_{\mathcal{O}} \neq G_{\mathcal{O}^{\bullet}}$, so existiert ein $J \in G_{\mathcal{O}} \setminus G_{\mathcal{O}^{\bullet}}$ und für jedes solche J gilt $G_{\mathcal{O}} = G_{\mathcal{O}^{\bullet}} \cup G_{\mathcal{O}^{\bullet}} J$. Es werde $J \in G_{\mathcal{O}} \setminus G_{\mathcal{O}^{\bullet}}$ von

$$A_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ \sigma x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{K}_{*}, \quad \sigma \in \{\pm 1\}$$

induziert. Wegen (5a) ist $x \in \mathbb{E}$. Es sei $x^{\pi} = z \in \mathbb{F}_{*}$. Da laut Annahme $G_{\mathcal{O}}^{\pi}$ kein Element aus $(V \times \langle S \rangle)^{\pi} \setminus V^{\pi}$ enthält, ist $z \neq \pm 1$. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma z^2 \\ 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & z & 0 \\ \sigma z^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{z^4}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{cz^2}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zusammen mit der Bedingung $(1 : 1 : 1) \in \mathcal{O}^{\pi}$ liefert $z^2 = b, c = -1 - b$. Es ist also

$$\mathcal{O}^{\pi} \supseteq \{(1 : \pm 1 : \pm 1), (1 : \pm z : \pm z^2)\}, \quad z \neq \pm 1$$

und wegen $V^{\pi} \leq G_{\mathcal{O}}^{\pi}$ enthält $G_{\mathcal{O}}^{\pi}$ die Involution $I(z)$, induziert von

$$I'(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & z & 0 \\ z^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weil $[G_{\mathcal{O}} : G_{\mathcal{O}^{\bullet}}] = 2$ ist, ist auch $[G_{\mathcal{O}}^{\pi} : G_{\mathcal{O}^{\bullet}}^{\pi}] = 2$. Außerdem hat man

$$G_{\mathcal{O}}^{\pi} = \langle V^{\pi}, I(z) \rangle, \quad |G_{\mathcal{O}}^{\pi}| = 8.$$

Weil $G_{\mathcal{O}}^{\pi}$ transitiv auf \mathcal{O}^{π} operiert, wenn $G_{\mathcal{O}}$ transitiv auf \mathcal{O} wirkt, folgt $|\mathcal{O}^{\pi}| = 8$, also $\mathbb{F} = GF(7)$. Der Kegelschnitt \mathcal{O}^{π} ist dann die Nullstellenmenge der Gleichung $z^2 w^2 - (1 + z^2)x^2 + y^2 = 0$. Die Tangente T_z an \mathcal{O}^{π} im Punkt $(1 : 1 : 1)$ ist gegeben durch $T_z = [z^2 : -(1 + z^2) : 1]$. Wegen Bemerkung 4 muß gelten $T_z = [1 : -2 : 1]^{\pi}$, also $z^2 = 1$, Widerspruch. \square

HILFSSATZ 13 (Echtes T-Oval mit transitiver Gruppe, das aus Stücken zweier Kegelschnitte einer Tangentschar besteht) *Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper der Charakteristik $\neq 2$ mit Restklassenkörper $\mathbb{F} = GF(p^n)$, so daß $4|(p^n - 1)$. Es sei $K_0 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2\}$ und*

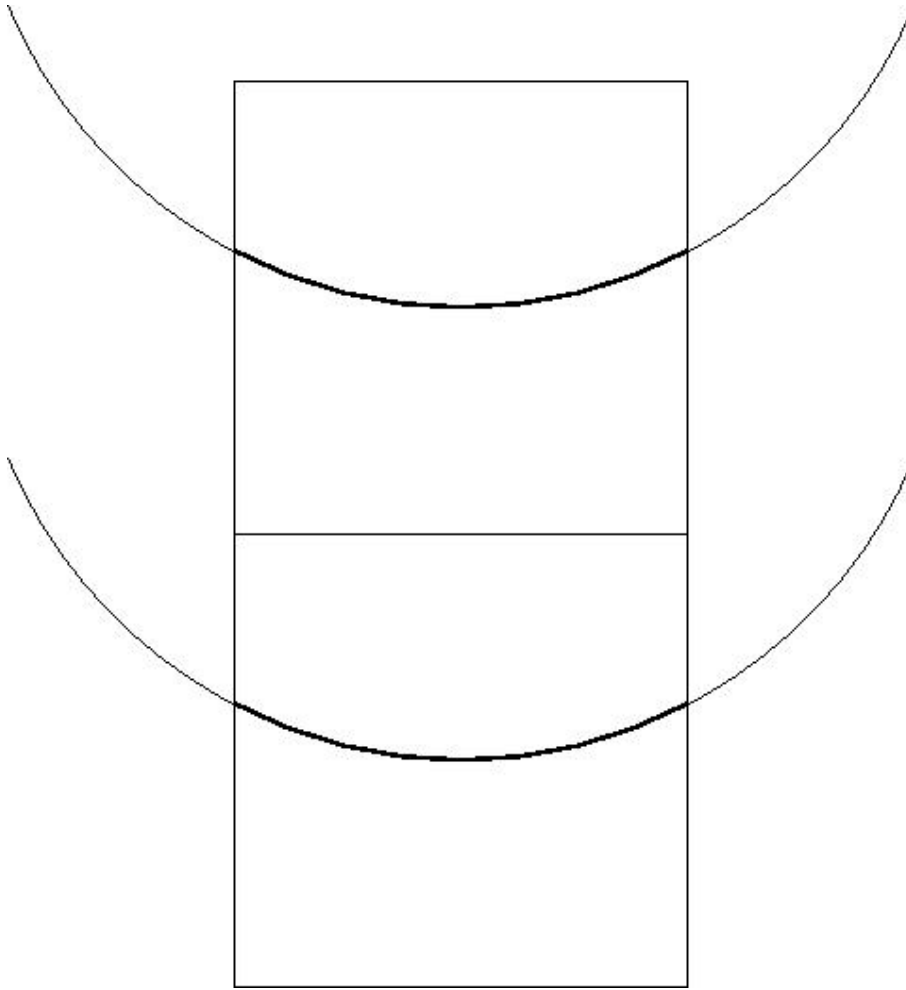


Abbildung 1.8: Zusammengesetztes Oval mit transitiver Kollineationsgruppe.

$K_1 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2 + t^{-1}ew^2\}$ für ein $e \in \mathbb{E}$ und einen Erzeuger t des maximalen Ideals \mathbb{M} des Bewertungsringses \mathbb{A} von \mathbb{K} .

Es sei $B_0 = K_0 \cap \{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x, y \in \mathbb{A}\}$ und $B_1 = K_1 \cap \{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{A}\}$. Dann gilt:

Die Menge $\mathcal{O} := B_0 \cup B_1$ ist ein echtes T-Oval mit einer (nicht regulären) transitiven Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$.

Beweis: In der Abbildung 1.8 ist so ein Oval \mathcal{O} gezeichnet.

(1) Es sei $M_{\mathcal{O}}$ die von folgender Menge $M'_{\mathcal{O}} \subset GL_3(\mathbb{K})$ induzierte Kollineationsgruppe:

$$M'_{\mathcal{O}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ c^2 & 2c & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{A} \right\}$$

Außerdem sei J die von der Matrix

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ t^{-1}e & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

induzierte Kollineation. Dabei ist $i^2 = -1$. Es ist $J^2 = I$ die Involution mit Achse $[0 : 1 : 0]$ und Zentrum $(0 : 1 : 0)$, also $J^4 = id$.

Wir setzen nun $G := \langle M_{\mathcal{O}}, J \rangle$. Es gilt $(1 : 1 : 1)^G = \mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} (1 : 0 : 0)^G &= (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}} \cup (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}J} \cup (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}I} \cup (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}J^3} \\ &= \{(1 : c : c^2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : c \in \mathbb{A}\} \cup \{(1 : c : c^2 + t^{-1}e) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : c \in \mathbb{A}\}, \\ (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}} &= (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}I}, \\ (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}J} &= (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}J^3}. \end{aligned}$$

Andererseits ist $B_0 = \{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x, y \in \mathbb{A}, y = x^2\} = \{(1 : x : x^2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{A}\} = (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}}$ sowie $B_1 = \{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{A}, y = x^2 + t^{-1}e\} = \{(1 : x : x^2 + t^{-1}e) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{A}\} = (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}J}$, also $(1 : 0 : 0)^G = \mathcal{O}$.

Wegen $(1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}} = (1 : 0 : 0)^{M_{\mathcal{O}}I}$ ist G nicht scharf einfach transitiv.

(2) Für jede Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ gilt $|g \cap \mathcal{O}| \leq 2$:

Wenn auf einer Geraden g ein Punkt P von \mathcal{O} liegt, kann man wegen der Transitivität von G oBdA. $P = (1 : 0 : 0)$ annehmen. Da K_0 ein Kegelschnitt ist, ist $|g \cap K_0| \in \{1, 2\}$. Ist g^π Tangente an K_0^π in P^π , so ist $g^\pi = [0 : 0 : 1]$. Da dann $g^\pi \cap B_1^\pi = \emptyset$ ist, ist $|g \cap \mathcal{O}| \leq 2$. Ist $g^\pi = [0 : -m : 1]$ für ein $m \in \mathbb{F}_*$, so ist $g^\pi \cap B_1^\pi = \emptyset$, also auch hier $|g \cap \mathcal{O}| \leq 2$. Ist $g = [0 : -m : 1]$ mit $m \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{A}$, so ist $g^\pi = [0 : 1 : 0]$. Da offensichtlich $|g \cap B_0| = 1$ ist, müssen wir zeigen, daß $|g \cap B_1| \leq 1$ gilt.

$$g \cap B_1 = \{(1 : x : x^2 + t^{-1}e) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x^2 - mx + t^{-1}e = 0, x \in \mathbb{A}\}$$

Es sei nun $m = t^{-j}e_m$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und ein $e_m \in \mathbb{E}$. Betrachte das Polynom $\tilde{f}(x) = x^2 - mx + t^{-1}e = x^2 - t^{-j}e_mx + t^{-1}e \in \mathbb{K}[x]$. Die Nullstellen von \tilde{f} stimmen mit den Nullstellen von $f(x) := t^j x^2 - e_m x + t^{j-1}e \in \mathbb{A}[x]$ überein. Das Polynom f hat eine Nullstelle in \mathbb{A} , denn $f^\pi(x) = -e_m^\pi x + (t^{j-1}e)^\pi$ hat eine einfache Nullstelle in \mathbb{F} (Lemma von Hensel, Seite 20). Wenn $r \in \mathbb{A}$ diese Nullstelle von f ist, zerfällt f über \mathbb{K} zu $f(x) = t^j(x-r)(x-r')$ für ein $r' \in \mathbb{K}$, also $f(x) = t^j x^2 - x(t^j(r+r')) + t^j r r'$. Für $r' \in \mathbb{A}$ erhält man dann $t^j(r+r') = e_m$, ein Widerspruch. Also ist $|g \cap B_1| = 1$ und $|g \cap \mathcal{O}| = 2$.

Ist $g = [0 : 1 : 0]$, so ist $|g \cap \mathcal{O}| = |\{(1 : 0 : 0), (1 : 0 : t^{-1}e)\}| = 2$.

(3) Jeder Punkt $P \in \mathcal{O}$ besitzt eine eindeutige Tangente T_P :

Es sei für $(1 : x : x^2) = P \in \mathcal{O} \cap K_0$ die Gerade T_P gleich der Tangente durch P bzgl. des Kegelschnittes K_0 , also $T_P = [x^2 : -2x : 1]$. Analog sei für $(1 : x : x^2 + t^{-1}e) = P \in \mathcal{O} \cap K_1$ die Gerade T_P gleich der Tangente durch P bzgl. des Kegelschnittes K_1 , also $T_P = [x^2 - t^{-1}e : -2x : 1]$. Ist $P \in \mathcal{O} \cap K_0$, so kann man wegen der Transitivität von $G_{\mathcal{O}}$ wieder $P = (1 : 0 : 0)$ annehmen. Es ist dann $T_P = [0 : 0 : 1]$. Da $T_P^\pi \cap B_1^\pi = \emptyset$ ist und $|T_P \cap K_0| = 1$, ist $|T_P \cap \mathcal{O}| = 1$. Wenn nun g eine Gerade durch P ist mit $g \neq [0 : 0 : 1]$, so ist $|g \cap \mathcal{O}| = 2$:

Für $g^\pi = [0 : 1 : 0]$ wurde in (2) gezeigt, daß $|g \cap \mathcal{O}| = 2$ ist. Für $g^\pi \neq [0 : 1 : 0]$ ist $g \cap B_1 = \emptyset$. Außerdem ist $|g \cap (B_0 \setminus (1 : 0 : 0))| = 1$, denn einerseits ist $|g \cap (K_0 \setminus (1 : 0 : 0))| = 1$ für jede Gerade

$g \neq [0 : 0 : 1]$ mit $(1 : 0 : 0) \in g$, andererseits ist $g \cap (K_0 \setminus (1 : 0 : 0)) \in (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ für jede Gerade $g \neq [0 : 0 : 1]$ mit $(1 : 0 : 0) \in g$ und $g^\pi \neq [0 : 1 : 0]$. Also ist $g \cap (K_0 \setminus (1 : 0 : 0)) \subset B_0$.

Ist $P \in \mathcal{O} \cap K_1$, so ist $P = (1 : x : x^2 + t^{-1}e)$ für ein $x \in \mathbb{A}$. Die Kollineation $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$, die von $A_\gamma \in GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & i & 0 \\ x^2 + t^{-1}e & 2ix & -1 \end{pmatrix}$$

induziert wird, trägt den Punkt $(1 : 0 : 0)$ auf den Punkt $P = (1 : x : x^2 + t^{-1}e)$. Die Matrix $(A_\gamma^{-1})^t$ bildet den Vektor $(0, 0, 1)$ auf $(-x^2 + t^{-1}e, 2ix, -1)$ ab, also ist $T_{(1:0:0)}^\gamma = [0 : 0 : 1]^\gamma = [x^2 - t^{-1}e : -2ix : 1]$ bzw. $T_{(1:0:0)}^\gamma = T_{(1:0:0)\gamma}$. Da $K_0^J = K_1$ ist und $K_0^{(M_{\mathcal{O}, I})} = K_0$, ist eigentlich auch ohne diese explizite Rechnung klar, daß die K_0 -Tangenten auf die K_1 -Tangenten abgebildet werden, wenn $K_0^\gamma = K_1$ ist. Also hat jeder Punkt $P \in \mathcal{O}$ eine eindeutige Tangente, nämlich die Tangente in P bzgl. des Kegelschnitts, auf dem der Punkt liegt.

(4) Das Oval \mathcal{O} ist stetig differenzierbar, da Kegelschnitte stetig differenzierbar sind und da B_1 und B_0 bzgl. der Spurtopologie von K_1 bzw. K_0 offene Mengen sind.

Zum Schluß kann man noch nachrechnen, daß G gleich $G_{\mathcal{O}}$ ist. \square

HILFSSATZ 14 (Ovale und Kegelschnitte einer Tangentschar) *Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper und \mathbb{F} der Restklassenkörper von \mathbb{K} mit $\text{char}\mathbb{F} = p \neq 2$. Dann gilt:*

Genau dann existiert ein echtes T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe, an dem mindestens zwei Kegelschnitte einer Tangentschar beteiligt sind, wenn gilt:

$$4 \mid (|\mathbb{F}| - 1)$$

Beweis:

(1) Wir nehmen an, daß $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ein echtes T-Oval ist, dessen Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$ transitiv auf \mathcal{O} operiert und an dem mindestens zwei Kegelschnitte einer Tangentschar beteiligt sind.

(1a) Es sei $\mathcal{K} = \{K(a) : a \in \mathbb{K}\}$ und $K(a) = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2 + aw^2\}$. Man kann oBdA. annehmen, daß $K(0)$ an \mathcal{O} beteiligt ist und daß $(1 : 0 : 0)$ ein Punkt auf $K(0) \cap \mathcal{O}$ ist. Es ist dann $N_{\mathcal{O}} \leq N$, wobei N die zu \mathcal{K} gehörige Buekenhoutgruppe ist (vgl. Satz 22 und dessen Beweis, Teil (2)), induziert von $N' \leq GL_3(\mathbb{K})$:

$$N' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ c^2 & 2c & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : c \in \mathbb{K} \right\} \times \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Die Gruppe $G_{\mathcal{O}}$, induziert von $G'_{\mathcal{O}} \leq GL_3(\mathbb{K})$, ist dann eine Untergruppe der Kollineationsgruppe G , die von $G' \leq GL_3(\mathbb{K})$ induziert wird mit

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & e & 0 \\ y & 2ex & e^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : e \in \mathbb{E}_0, x, y \in \mathbb{K} \right\}.$$

Zu dieser Gruppe G' gelangt man, wenn man für $\gamma \in G_{\mathcal{O}} \setminus N_{\mathcal{O}}$ einen Repräsentanten A_γ ansetzt unter Verwendung von $(0 : 0 : 1)^\gamma = (0 : 0 : 1)$, $[\infty]^\gamma = [\infty]$. Für alle $x \in \mathbb{K}$ muß dann ein $y \in \mathbb{K}$ existieren mit

$$(A_\gamma^{-1})^t \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_\gamma^{-1} \equiv \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anschließend prüft man, daß $\{K(1)^{\gamma^i} : i \in \mathbb{Z}\}$ eine endliche Menge ist (vgl. Hilfssatz 5). Man erhält dann $A_\gamma \in G'$.

(1b) Da $(0 : 0 : 1)$ Fixpunkt von $G_{\mathcal{O}}$ ist, kann keine Ovaltangente durch $(0 : 0 : 1)$ gehen (vgl. Seite 29). Also ist $[0 : 1 : 0]$ Sekante an \mathcal{O} . Es existiert demnach ein $z \in \mathbb{K}_*$ mit $(1 : 0 : z) \in \mathcal{O} \setminus K(0)$, dazu findet sich dann eine Kollineation $J \in G_{\mathcal{O}} \setminus N_{\mathcal{O}}$ mit $(1 : 0 : 0)^J = (1 : 0 : z)$, d.h. J wird induziert von J' mit

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ z & 0 & e^2 \end{pmatrix} \text{ für eine Einheitswurzel } e \in \mathbb{E}_0.$$

Es ist $(1 : 0 : 0)^{J^2} = (1 : 0 : z(1 + e^2))$ und für $e^2 \neq -1$ enthält \mathcal{O} drei kollineare Punkte, also muß -1 Quadratzahl in \mathbb{K} sein und

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ z & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ mit } i^2 = -1.$$

Es ist dann $K(z)$ an \mathcal{O} beteiligt. Außerdem folgt, daß -1 Quadratzahl in \mathbb{F} ist und deshalb $4 \mid (|\mathbb{F}| - 1)$.

(2) Der Beweis der anderen Richtung wurde durch das Beispiel den letzten Hilfssatzes geleistet. \square

HILFSSATZ 15 (Ovale und Kegelschnitte einer Passantenschar vom Äquivalenztyp $o(\alpha) = 1$)
Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper mit dem Restklassenkörper \mathbb{F} der Charakteristik $p \neq 2$. Dann ist äquivalent:

(A) *Es existiert ein echtes T-Oval in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit transitiver Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$, an dem zwei oder mehr Kegelschnitte einer Passantenschar vom Äquivalenztyp $o(\alpha) = 1$ beteiligt sind.*

(B) *Der Körper \mathbb{K} besitzt eine primitive p -te Einheitswurzel $1 + \epsilon$ und es ist $o(\epsilon) \geq 2$.*

Beweis: In (1) bis (5) nehmen wir an, daß \mathcal{O} ein T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$ ist, an dem mindestens zwei verschiedene Kegelschnitte einer Passantenschar vom Äquivalenztyp $o(\alpha) = 1$ beteiligt sind. In (6) zeigen wir die Gegenrichtung.

(1) Es sei die Passantenschar, der die Kegelschnitte entstammen, oBdA. gleich

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ K(r) : r \in \left(\mathbb{K}^2 - \frac{1}{\alpha} \mathbb{K}^2 \right) \setminus \{0\} \right\}, \quad K(r) = \left\{ (w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : y^2 = \frac{1}{\alpha} x^2 + r w^2 \right\}.$$

Wir können annehmen, daß \mathcal{O} den Punkt $(1 : 0 : 1) \in K(1)$ enthält und auf einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ von $(1 : 0 : 1)$ mit $K(1)$ übereinstimmt.

Es seien $u, v \in \mathbb{K}$ nicht beide Null und $\sigma \in \{\pm 1\}$. Definiere $A_\sigma(u, v)$ und $A(u, v) \in GL_3(\mathbb{K})$ wie folgt:

$$A_\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & \sigma \alpha v \\ 0 & v & \sigma u \end{pmatrix}, \quad A(u, v) := A_1(u, v)$$

Eine von $A_\sigma(u, v)$ bzw. $A(u, v)$ induzierte Kollineation werde mit $\gamma_\sigma(u, v)$ bzw. $\gamma(u, v)$ bezeichnet und es sei dann $\delta(\gamma_\sigma(u, v)) := \delta(A_\sigma(u, v)) := u^2 - \alpha v^2$ (vgl. Beweis von Satz 22 (III), Teil (4) auf

Seite 92f).

(2) Es ist $\mathcal{O}^\pi \subset [0 : 1 : 0] \setminus \{(0 : 0 : 1) \cup (1 : 0 : 0)\}$ und die Gruppe $G_{\mathcal{O}}$ ist eine Untergruppe der Gruppe $\tilde{G} = G \rtimes \langle I \rangle$, die induziert wird von folgender Gruppe $\tilde{G}' = G' \rtimes \langle I' \rangle$:

$$G' = \{A(u, v) \in GL_3(\mathbb{K}) : \delta(A(u, v)) \in \mathbb{E}_0^2\}, \quad I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jede Kollineation $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$ muß (*) erfüllen:

$$(*) \quad \forall r \in (\mathbb{K}^2 - \frac{1}{\alpha}\mathbb{K}^2) \setminus \{0\} \exists s \in (\mathbb{K}^2 - \frac{1}{\alpha}\mathbb{K}^2) \setminus \{0\} \text{ mit } (K(r))^\gamma = K(s)$$

Jede Kollineation $\gamma \in PGL_3(\mathbb{K})$, die (*) erfüllt, läßt $[\infty]$ und $(1 : 0 : 0)$ fest, denn die zwei allen Kegelschnitten aus \mathcal{K}_α gemeinsamen (nicht \mathbb{K} -rationalen) Punkte $(0 : \pm\sqrt{\alpha} : 1)$ müssen dann unter γ festbleiben, also auch ihre Verbindungsgerade $[\infty]$ sowie deren Pol $(1 : 0 : 0)$. Über den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & w \\ 0 & v & x \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & w \\ 0 & v & x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man, daß die Gruppe \hat{G} der Kollineationen, die (*) erfüllen, induziert wird von \hat{G}' mit

$$\hat{G}' = \{A_\sigma(u, v) \in GL_3(\mathbb{K}) : (u, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \setminus \{(0, 0)\}\}.$$

Es ist $(K(r))^{\gamma_\sigma(u, v)} = K\left(\frac{r}{\delta(\gamma_\sigma(u, v))}\right)$. Wegen $[G_{\mathcal{O}} : N_{\mathcal{O}}] < \infty$ ist deshalb für jedes $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$ auch $|K(1)^{\langle \gamma \rangle}| < \infty$, also gilt $\{\delta(\gamma_\sigma(u, v)) : \gamma_\sigma(u, v) \in G_{\mathcal{O}}\} \subseteq \mathbb{E}_0$. Da die Nichtquadratzahl α ungerade Ordnung hat, folgt für $(u, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \setminus \{(0, 0)\}$ mit $u^2 - \alpha v^2 \in \mathbb{E}_0$, daß $o(u) = 0$ ist und $o(v) \geq 0$ bzw. $o(\alpha v^2) > 0$. Wenn also $u^2 - \alpha v^2 \in \mathbb{E}_0$ ist, dann ist auch $u^2 - \alpha v^2 \in \mathbb{E}_0^2$. Es folgt $G_{\mathcal{O}} \leq \tilde{G}$. Insbesondere ist $G_{\mathcal{O}}^\pi \leq PGL_3(\mathbb{F})$ wohldefiniert, da G^π und I^π wohldefiniert sind.

Da eine Bijektion zwischen \tilde{G} und \tilde{G}' besteht, können wir die Abbildung $\delta : G_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{E}_0^2$ definieren wie folgt:

Für $\gamma \in \tilde{G}$ existiert genau ein Repräsentant $A_\sigma(u, v) \in \tilde{G}'$. Da dieser Repräsentant eindeutig ist, setze $\delta(\gamma) = u^2 - \alpha v^2$.

Betrachten wir noch das Bild \mathcal{O}^π von \mathcal{O} . Wenn $K(r)$ an \mathcal{O} beteiligt ist, ist $r \in \mathbb{E}_0^2$, etwa $r = s^2$. Dann erfüllt jeder Punkt $(1 : x : y)$ auf $K(r)$ die Gleichung $y^2 = \frac{1}{\alpha}x^2 + s^2$. Da $o(\frac{1}{\alpha}x^2)$ ungerade ist, muß $o(y) = o(s) = 0$ sein und $o(\frac{1}{\alpha}x^2) \geq 0$, also $o(x) > 0$. Da $K(r) \cap [\infty] = \emptyset$ ist, liegt also für jeden Punkt $P = (1 : x : y)$ das Bild P^π auf der Geraden $[0 : 1 : 0]$, aber nicht auf $[\infty]$. Demnach gilt: $\mathcal{O}^\pi \subseteq [0 : 1 : 0] \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$. Da $y^\pi \neq 0$ ist für $(1 : x : y) \in K(r)$, $r \in \mathbb{E}_0^2$, ist $\mathcal{O} \cap (1 : \mathbb{M} : \mathbb{M}) = \emptyset$, also $\mathcal{O}^\pi \subseteq [0 : 1 : 0] \setminus \{(0 : 0 : 1), (1 : 0 : 0)\}$.

(3) Es gilt:

(a) $(1 : 0 : -1) \in \mathcal{O}$

(b) $G_{\mathcal{O}} \leq G$

(c) $\exists h \in \mathbb{E}_0^2$ mit $G_{\mathcal{O}}/N_{\mathcal{O}} \cong \langle h \rangle$ bzw. $\exists \gamma_h \in G_{\mathcal{O}}$ mit $\delta(\gamma_h) = h \in \mathbb{E}_0^2$, $G_{\mathcal{O}} = \langle N_{\mathcal{O}}, \gamma_h \rangle$

(d) $G_{\mathcal{O}}$ enthält genau eine Involution.

(3a) Betrachte die Gerade $(1 : 0 : 1) \vee (1 : 0 : 0) = [0 : 1 : 0]$. Da $(1 : 0 : 0)$ Fixpunkt von G' (also Fixpunkt von $G_{\mathcal{O}}$) ist, kann $[0 : 1 : 0]$ keine Tangente an \mathcal{O} sein (vgl. Seite 29). Also existiert ein Punkt $(1 : 0 : y) \in [0 : 1 : 0] \cap \mathcal{O}$ mit $y \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Da laut Annahme $G_{\mathcal{O}}$ transitiv ist, existiert eine Kollineation $\gamma_y \in G_{\mathcal{O}}$ mit $(1 : 0 : 1)^{\gamma_y} = (1 : 0 : y)$. Setzt man einen Repräsentanten $A_{\sigma}(u, v) \in G'$ für γ_y an, so kann man nachrechnen, daß $\sigma u = y = -1$ sein muß, weil sonst $|(1 : 0 : 1)^{\langle \gamma_y \rangle} \cap [0 : 1 : 0]| \geq 3$ wäre.

(3b) Es sei $\gamma_{\sigma}(u, v) \in G_{\mathcal{O}} \setminus N_{\mathcal{O}}$ und $\delta(\gamma_{\sigma}(u, v)) = u^2 - \alpha v^2 = \eta^2 \in \mathbb{E}_0^2 \setminus \{1\}$. Es muß $\sigma = 1$ sein: Angenommen, $\sigma = -1$. Betrachte $\gamma' := (\gamma_{-1}(u, v))^2$, induziert von

$$A_{\gamma'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $[0 : 1 : 0] \cap \mathcal{O} = \{(1 : 0 : 1), (1 : 0 : -1)\}$ und $N_{\mathcal{O}} \neq G_{\mathcal{O}}$ ist dann $\eta^2 = -1$. Daraus folgt, daß $i^2 = -1$ Quadratzahl in \mathbb{K} bzw. \mathbb{F} ist. Dann ist $\mathcal{O}^{\pi} = \{(1 : 0 : \pm 1), (1 : 0 : \pm i)\}$ und $\mathcal{O} \subset K(1) \cup K(-1)$. Denn wenn noch ein dritter Kegelschnitt $K(\xi^2)$ mit $\xi^2 \notin \{\pm 1\}$ an \mathcal{O} beteiligt wäre, gäbe es ein $\gamma_{\sigma}(a, b) \in G_{\mathcal{O}} \setminus N_{\mathcal{O}}$ mit $\delta(\gamma_{\sigma}(a, b)) = a^2 - \alpha b^2 = \xi^2, \xi^2 \neq \pm 1$. Eben wurde gezeigt, daß für $\gamma_{\sigma}(a, b) = \gamma_{-1}(a, b)$ die Einheitswurzel ξ^2 gleich -1 sein müßte, ein Widerspruch zu $K(1)^{\gamma_{\sigma}(a, b)} \notin \{K(1), K(-1)\}$. Also ist $\gamma_{\sigma}(a, b) = \gamma(a, b)$. Dann ist aber $\beta := \gamma(a, b)\gamma_{-1}(u, v) = \gamma_{-1}(au + \alpha bv, av + bu)$ und $\delta(\beta) = \xi^2 \cdot (-1) = -\xi^2 \neq \pm 1$, im Widerspruch zu $\beta \notin G$ (man betrachte β^2). Also ist $\mathcal{O}^{\pi} = \{(1 : 0 : \pm 1), (1 : 0 : \pm i)\}$ und die Menge der an \mathcal{O} beteiligten Kegelschnitte ist $\{K(1), K(-1)\}$. Das kann aber nicht sein:

Es ist $\mathcal{O} \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} = K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$. Denn wenn es einen Punkt $P \in K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$ gäbe mit $P \notin \mathcal{O}$, dann wäre $|((1 : 0 : 1) \vee P) \cap \mathcal{O}| = 1$, da $((1 : 0 : 1) \vee P)^{\pi} \neq [0 : 1 : 0]$ ist, also $((1 : 0 : 1) \vee P) \cap \mathcal{O} \subseteq (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$. Da aber auch $|[-1 : 0 : 1] \cap \mathcal{O}| = 1$ ist ($[-1 : 0 : 1]$ ist Tangente an $K(1)$ im Punkt $(1 : 0 : 1)$), ist das ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Tangente an \mathcal{O} im Punkt $(1 : 0 : 1)$.

Da die Kollineation γ_y , die den Punkt $(1 : 0 : 1)$ auf $(1 : 0 : -1)$ trägt, ein wohldefiniertes Bild $\gamma_y^{\pi} \in PGL_3(\mathbb{F})$ hat, folgt $K(1) \subseteq \mathcal{O}$. Dann ist aber $K(1) = \mathcal{O}$, also \mathcal{O} kein echtes T-Oval. Widerspruch. Es folgt also:

$$\gamma \in G_{\mathcal{O}} \setminus N_{\mathcal{O}} \implies \gamma \in G$$

Nun zeigen wir noch: $\gamma \in N_{\mathcal{O}} \implies \gamma \in G$ (und damit $G_{\mathcal{O}} \leq G$).

Angenommen, es existiert ein $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$ mit $\gamma \in N_{\mathcal{O}} \cap GI$. In diesem Fall wähle man eine beliebige Kollineation $\gamma(u, v) \in G_{\mathcal{O}} \setminus N_{\mathcal{O}}$ und betrachte $\gamma' := \gamma(u, v) \circ \gamma \in G_{\mathcal{O}} \setminus N_{\mathcal{O}}$. Es ist dann $\gamma' \in G \cdot GI = GI$, also $\gamma' \notin G$, im Widerspruch zu $G_{\mathcal{O}} \setminus N_{\mathcal{O}} \subseteq G$.

(3c) Es ist $\delta : \left\{ \begin{array}{l} G_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{E}_0^2 \\ \gamma \longmapsto \delta(\gamma) \end{array} \right\}$ ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $N_{\mathcal{O}}$, d.h. $\delta(G_{\mathcal{O}}) \cong$

$G_{\mathcal{O}}/N_{\mathcal{O}}$. Demnach ist $G_{\mathcal{O}}/N_{\mathcal{O}}$ isomorph zu einer zyklischen Untergruppe von \mathbb{E}_0^2 , es existiert also ein $\gamma_h \in G_{\mathcal{O}}$ mit $G_{\mathcal{O}} = \langle N_{\mathcal{O}}, \gamma_h \rangle$. Wenn γ_h von $A_h \in G'$ mit

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & \alpha u_0 \\ 0 & v_0 & u_0 \end{pmatrix}, \quad u_0^2 - \alpha v_0^2 = h \in \mathbb{E}_0^2$$

induziert wird, ist $\delta(G_{\mathcal{O}}) = \langle h \rangle$ und $G_{\mathcal{O}}/N_{\mathcal{O}} \cong \langle h \rangle \leq \mathbb{E}_0^2$.

(3d) Wegen $G_{\mathcal{O}} \leq G$ und $(1 : 0 : -1) \in \mathcal{O}$ folgt, daß die Involution J , induziert durch J' mit

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in $G_{\mathcal{O}}$ enthalten ist (vgl. (3a)). Es gibt außerdem keine andere Involution in $G_{\mathcal{O}}$, wie man leicht mit Hilfe von (3b) nachrechnet.

(4) Es gilt: $\langle h \rangle$ enthält ein Element von p -Potenzordnung, d.h. $(\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\} \neq \emptyset$.

Bekanntlich ist $\mathbb{E}_0 = G_{\mathbb{K}} \times \mu_{\mathbb{F}}$, wobei $\mu_{\mathbb{F}}$ die Menge der $(p^r - 1)$ -ten Einheitswurzeln in \mathbb{K} bezeichnet, wenn $\mathbb{F} = GF(p^r)$ ist. Der Faktor $G_{\mathbb{K}}$ ist – abgesehen von 1 – gleich der Menge der Einheitswurzeln, die p -Potenzordnung haben, das sind genau die Einheitswurzeln, die gleichzeitig Einseinheiten sind:

$$G_{\mathbb{K}} = \mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1$$

Angenommen, $\langle h \rangle \leq \mu_{\mathbb{F}}$.

Dann gilt $\mathcal{O} \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} = K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$. Man argumentiere nun wie in (3b). Als Konsequenz ergibt sich $\mathcal{O} = K(1)$. Wenn also $\mathbb{E}_0 = \mu_{\mathbb{F}}$ ist, ist \mathcal{O} kein echtes T-Oval mit transitiver Gruppe.

Gestattet $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ein echtes T-Oval mit transitiver Gruppe, an dem Kegelschnitte der Schar \mathcal{K}_{α} mit $o(\alpha) = 1$ beteiligt sind, so ist $\text{char}\mathbb{K} = 0$ und \mathbb{K} oBdA. ein echter Oberkörper von \mathbb{Q}_p . Genauer: $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}_p] = v_{\mathbb{K}} \cdot r$, $\mathbb{F} = GF(p^r)$, $p - 1 \mid v_{\mathbb{K}}$ (vgl. Hilfssatz 2). Außerdem ist jede primitive p -te Einheitswurzel von der Form $1 + \epsilon = 1 + t^j e_{\epsilon}$ für eine Einheit $e_{\epsilon} \in \mathbb{E}$ und $j = \frac{v_{\mathbb{K}}}{p-1}$.

(5) Ist $j = 1$, so ist $\mathcal{O} = K(1)$, also \mathcal{O} kein echtes T-Oval.

Dem Hilfssatz 2 entnimmt man, daß im Fall $j = 1$ für jedes Element $1 + \epsilon \in G_{\mathbb{K}} \setminus \{1\}$ gilt: $o(\epsilon) = 1$. Betrachten wir statt \mathcal{O} das Oval $\mathcal{O}' := \mathcal{O}^{\beta}$, wobei $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$ induziert werde von $B \in GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ -t^{-1} & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Für $r \in (\mathbb{K}^2 - \frac{1}{\alpha}\mathbb{K}^2) \setminus \{0\}$ wird der Kegelschnitt $(K(r))^{\beta}$ dann repräsentiert von der Matrix $(Q(r))^{\beta}$ mit

$$(Q(r))^{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1-r}{t} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad \alpha = at, \quad a \in \mathbb{E}.$$

Für jedes $1 + \epsilon = 1 + te_{\epsilon} \in (\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\}$ ist dann

$$(Q(1 + \epsilon))^{\beta} = \begin{pmatrix} -e_{\epsilon} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix},$$

also $((K(1 + \epsilon))^{\beta})^{\pi} = \{(1 : x : \frac{1}{2a^{\pi}}x^2 + e_{\epsilon}^{\pi}) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : x \in \mathbb{F}\} \cup \{(0 : 0 : 1)\}$. Der Kegelschnitt $(K(1))^{\beta}$ hat die Matrix

$$(Q(1))^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

und sein Bild ist gleich $\{(1 : x : \frac{1}{2a^\pi}x^2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : x \in \mathbb{F}\} \cup \{(0 : 0 : 1)\}$. Weiter gilt:

$$\otimes \begin{cases} \beta((1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}) = (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) & \Rightarrow (P \in (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) \cap \mathcal{O}' \Rightarrow \exists (1 + \epsilon) \in G_{\mathbb{K}} \text{ mit} \\ & P \in (K(1 + \epsilon))^\beta) \text{ (} P \text{ ein projektiver Punkt)} \\ \beta((1 : 0 : 1)) = (1 : 0 : 0) & \Rightarrow (1 : 0 : 0) \in \mathcal{O}' \cap (K(1))^\beta, (1 : 0 : 0) \in (\mathcal{O}')^\pi \\ \beta((1 : 0 : \mathbb{F} \setminus \{1\})^{\pi^{-1}}) \subseteq (0 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} & \Rightarrow (0 : 0 : 1) \in (\mathcal{O}')^\pi, [\infty] \cap (\mathcal{O}')^\pi = \{(0 : 0 : 1)\} \end{cases}$$

Wir zeigen nun zuerst, daß $(\mathcal{O}')^\pi$ ein Oval sein muß und führen dies dann zum Widerspruch.

Wähle eine Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ aus, die den Punkt $(1 : 0 : 0)$ enthält und deren Bild g^π verschieden von $[0 : 1 : 0]$ und $[0 : 0 : 1]$ ist. Wegen $g^\pi \notin \{[0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$ und weiter wegen $(K(1)^\beta)^\pi = \{(1 : x : \frac{1}{2a^\pi}x^2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : x \in \mathbb{F}\} \cup \{(0 : 0 : 1)\}$ folgt, daß g den Kegelschnitt $(K(1)^\beta)^\pi$ in $(1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}}$ genau einmal schneidet (vgl. Bem. 4). Ferner ist $(1 : 0 : 0) \notin (K(1 + \epsilon))^{\pi \circ \beta}$ für alle $1 + \epsilon \in G_{\mathbb{K}} \setminus \{1\}$ und die Tangente bzgl. \mathcal{O}' in $(1 : 0 : 0)$ ist von g verschieden.

Es folgt, daß g das Oval \mathcal{O}' in $(1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}}$ genau einmal schneidet, also muß ein Punkt $P \in \mathcal{O}'$ existieren mit $P \in g, P^\pi \notin \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : wxy = 0\}$, insbesondere hat man sogar $P^\pi \in (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) \setminus (1 : \mathbb{M} : \mathbb{A})$. Dann enthält $(\mathcal{O}')^\pi$ drei nichtkollineare Punkte und ist deshalb nicht in einer Geraden enthalten. Der Fall, daß $(\mathcal{O}')^\pi$ gleich der Vereinigung zweier verschiedener Geraden g, h in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ ist (eventuell ohne Schnittpunkt), kann auch nicht eintreten:

Falls $(\mathcal{O}')^\pi = g \cup h$ ist für zwei Geraden g, h in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, muß wegen $(\mathcal{O}')^\pi \cap [\infty] = (0 : 0 : 1)$ (vgl. \otimes) gelten:

$$g \cap h = (0 : 0 : 1), \quad g, h \neq [\infty]$$

Dann ist aber $(1 : 0 : 0)$ ein regulärer Punkt von $(\mathcal{O}')^\pi$ und es gilt (vgl. Bem. 4(3) und 4(4)), daß die Tangente T an \mathcal{O} in $(1 : 0 : 0)$ das Bild $T^\pi = [0 : 1 : 0]$ hat. Diese Tangente T ist aber gleich der algebraischen Tangente T_a an $(K(1)^\beta)^\pi$ im Punkt $(1 : 0 : 0)$ und es ist $T_a = [0 : 0 : 1]$. Widerspruch.

Falls $(\mathcal{O}')^\pi = g \cup h, g \cap h$ ist für zwei Geraden g, h in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, muß – wieder wegen $(\mathcal{O}')^\pi \cap [\infty] = (0 : 0 : 1)$ – gelten:

$$S = g \cap h \neq (0 : 0 : 1), \quad g, h \neq [\infty]$$

Für $S \in [\infty]$ ist dann g oder h gleich $S \vee (0 : 0 : 1) = [\infty]$, was nicht sein kann. Für $S \notin [\infty]$ ist $|(g \cup h) \cap [\infty]| = 2$, aber $|(\mathcal{O}')^\pi \cap [\infty]| = 1$, was ebenfalls nicht sein kann. Also folgt (vgl. Satz 3):

$$K := (\mathcal{O}')^\pi \text{ ist ein Oval in } \mathcal{P}_2(\mathbb{F}).$$

Die Punkte $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ sind in K enthalten. Andererseits ist jeder dieser zwei Punkte das Bild eines Punktes auf $\mathcal{O}' \cap K(1)^\beta$, nämlich $(1 : 0 : 0) = ((1 : 0 : 1)^\beta)^\pi$ sowie $(0 : 0 : 1) = ((1 : 0 : -1)^\beta)^\pi$. Es sei T_1 die Tangente in $(1 : 0 : 1)$ an $K(1)$ und T_2 die Tangente in $(1 : 0 : -1)$ an $K(1)$. Es ist $(T_1^\beta)^\pi = [0 : 0 : 1]$ und $(T_2^\beta)^\pi = [\infty]$. Bemerkung 4(2) besagt nun, daß die Tangente an K im Punkt $(1 : 0 : 0)$ gleich $(T_1^\beta)^\pi$ sein muß und daß die Tangente an K im Punkt $(0 : 0 : 1)$ gleich $(T_2^\beta)^\pi$ sein muß. Also wird K beschrieben durch eine Matrix $Q \in GL_3(\mathbb{F})$ mit

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{F}_*.$$

Hätte Q nicht diese Gestalt, so widerspräche das den Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = Q^t.$$

Es ist $\mathcal{O}' \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) \neq (K(1)^\beta) \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$, sonst wäre nämlich $\mathcal{O} = K(1)$ (vgl. (3b) und \otimes). Es ist aber auch $(K(1+\epsilon))^\beta \cap (1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} = \emptyset \forall 1+\epsilon \in G_{\mathbb{K}} \setminus \{1\}$ und weiter $\mathcal{O}' \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) \subseteq \{(K(1+\epsilon))^\beta : 1+\epsilon \in G_{\mathbb{K}}\}$ (vgl. \otimes). Deshalb existiert ein $1+te_\epsilon = 1+\epsilon \in G_{\mathbb{K}} \setminus \{1\}$ und ein Punkt $P \in (K(1+\epsilon))^\beta$ mit $P \in (1 : \mathbb{E} : \mathbb{E})$ und $P \in \mathcal{O}'$. Wenn nun $P = (1 : x : y)$ ist für zwei Einheiten $x, y \in \mathbb{K}$, dann ist die Tangente T_{P^π} durch P^π an K wegen Bemerkung 4 einerseits gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^\pi \\ y^\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^\pi \\ zx^\pi \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{P^\pi} = [y^\pi : zx^\pi : 1],$$

andererseits durch

$$\begin{pmatrix} -e_\epsilon^\pi & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a^\pi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^\pi \\ y^\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_\epsilon^\pi + y^\pi \\ -\frac{1}{a^\pi} x^\pi \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{P^\pi} = [-e_\epsilon^\pi + y^\pi : -\frac{1}{a^\pi} x^\pi : 1].$$

Wegen $e_\epsilon^\pi \neq 0$ ein Widerspruch.

(6) Ist $j \geq 2$, so existiert in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ein echtes T-Oval mit regulärer Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$, an dem Kegelschnitte der Schar \mathcal{K}_α beteiligt sind.

(6a) Es sei $h := 1 + \epsilon \in G_{\mathbb{K}} \setminus \{1\}$ eine primitive p -te Einheitswurzel, also $1 + \epsilon = 1 + t^j e_\epsilon$ für eine Einheit e_ϵ . Für $i \in \{0, \dots, p-1\}$ sei weiter $1 + t^j e_{\epsilon_i} := 1 + \epsilon_i := (1 + \epsilon)^i$, für $i \in \{1, \dots, p-1\}$ ist dann $e_{\epsilon_i}^\pi = (ie_\epsilon)^\pi$ (vgl. Hilfssatz 2). Es war außerdem $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}_p] = v_{\mathbb{K}} \cdot r$, $\mathbb{F} = GF(p^r)$, $j = \frac{v_{\mathbb{K}}}{p-1} \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$. Betrachte nun für $i \in \{0, 1\}$ die Gruppen $G_i \leq G$ sowie $M_i \leq G$, induziert durch M'_i bzw. G'_i mit

$$\begin{aligned} M'_i &= \{A(u, v) \in G' : \delta(A(u, v)) = 1, u^\pi = 1, o(v) = i\}, \\ G'_i &= \{A(u, v) \in G' : \delta(A(u, v)) \in \langle h \rangle, u^\pi = 1, o(v) = i\}. \end{aligned}$$

Außerdem sei $\gamma_h \in G_0 \setminus M_0$ gegeben durch eine Matrix A_h mit

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & atv_0 \\ 0 & v_0 & u_0 \end{pmatrix}, \quad h = u_0^2 - \alpha v_0^2, o(v_0) = 0, u_0^\pi = 1, \alpha = at, a \in \mathbb{E}.$$

So ein A_h existiert für jedes $v_0 \in \mathbb{E}$, denn setzt man $u_0 = 1 + tx_0$ für eine Einheit x_0 , so hat die Gleichung $h = 1 + t^j e_\epsilon = 1 + 2tx_0 + t^2 x_0^2 - atv_0^2$ eine Lösung $x_0 \in \mathbb{E}$ genau dann, wenn $x_0 = t^{j-1} \frac{e_\epsilon}{2} - t \frac{x_0^2}{2} + \frac{a}{2} v_0^2$ eine Lösung $x_0 \in \mathbb{E}$ hat. Weil $j \geq 2$ ist, sichert das Lemma von Hensel die Existenz so einer Lösung. Für sie gilt dann $x_0^\pi = (\frac{a}{2} v_0^2)^\pi$.

Wir betrachten nun Gruppen $M, N, H, U \leq PGL_3(\mathbb{K})$ wie folgt:

Für $r = 1$, also $\mathbb{F} = GF(p)$, setze $M = M_1, H = \langle M, \gamma_h \rangle, N = \langle M, J \rangle$ sowie $U = \langle N, \gamma_h \rangle = \langle H, J \rangle = \langle M, \gamma_h, J \rangle$. Dabei ist J die Involution aus (3d).

Für $r > 1$, also $\mathbb{F} = GF(p^r)$, ergänze man $v_0^\pi := b_0 \in \mathbb{F}_*$ zu einer Basis \mathcal{B} des $GF(p)$ -Vektorraumes \mathbb{F} , etwa $\mathcal{B} = \{b_0, \dots, b_{r-1}\}$. Anschließend wähle man für b_1, \dots, b_{r-1} jeweils ein Urbild v_1, \dots, v_{r-1} aus \mathbb{E} aus, also $(v_0^\pi, \dots, v_{r-1}^\pi) = (b_0, \dots, b_{r-1}) = \mathcal{B}$. Jetzt wähle für jedes $i \in \{1, \dots, r-1\}$ eine Kollineation $\gamma_i := \gamma(u_i, v_i) \in M_0$ aus, repräsentiert von $A_i := A(u_i, v_i)$ mit

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_i & \alpha v_i \\ 0 & v_i & u_i \end{pmatrix}, \quad u_i^2 - \alpha v_i^2 = 1, u_i^\pi = 1.$$

So ein A_i existiert für jedes $i \in \{1, \dots, r-1\}$ (Argumentation wie bei $A_h =: A_0$).

Es sei nun $M := \langle M_1, \gamma_1, \dots, \gamma_{r-1} \rangle, H = \langle M, \gamma_h \rangle, N = \langle M, J \rangle$ sowie $U = \langle N, \gamma_h \rangle = \langle H, J \rangle =$

$\langle M, \gamma_h, J \rangle$.

(6b) Wir zeigen nun, daß (sowohl für $r = 1$ als auch für $r > 1$) die Menge $(1 : 0 : 1)^U$ ein stetig differenzierbares Oval ist.

Setze $(1 : 0 : 1)^U =: \mathcal{O}'$. Es ist $[U : N] = [H : M] = p$ und es ist $\mathcal{O}' \subseteq \{K(h^i) : i = 1, \dots, p\}$, genauer:

$$\begin{aligned} K(1) \cap \mathcal{O}' \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} &= (1 : 0 : 1)^M \\ K(h^i) \cap \mathcal{O}' \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} &= ((1 : 0 : 1)^M)^{\gamma_h^i} \quad (i = 1, \dots, p-1). \end{aligned}$$

Wenden wir auf die Gruppen M, N, H und U sowie auf \mathcal{O}' die Kollineation β aus (5) an, so hat man:

$$\begin{aligned} (K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}})^{\beta} &= \{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{A}, y = \frac{1}{2a}x^2 - \frac{t}{2}y^2\} \\ (K(1 + \epsilon_i) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}})^{\beta} &= \{(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{A}, y = \frac{1}{2a}x^2 + t^{j-1} \frac{\epsilon_i}{2} - \frac{t}{2}y^2\} \\ ((1 : 0 : 1)^H)^{\beta} &\subset (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) \\ ((K(h^i))^{\beta})^{\pi} &= \{(1 : x : \frac{1}{2a^{\pi}}x^2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : x \in \mathbb{F}\} \cup \{(0 : 0 : 1)\} \\ &=: K \end{aligned}$$

Wenn nun $\mathcal{O} := (\mathcal{O}')^{\beta}$ ist, ist $(\mathcal{O} \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}))^{\pi} \subseteq K$. Wegen $(0 : 0 : 1) = (1 : 0 : -1)^{\pi \circ \beta \circ \pi^{-1}}$ ist deshalb $\mathcal{O}^{\pi} = K$. Für jede Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit $(1 : 0 : 0) \in g, g \neq [0 : 0 : 1]$, gilt $|\mathcal{O} \cap g| = 2$:

Wenn g so eine Gerade ist, kann $g^{\pi} = [0 : 0 : 1]$ sein oder $g^{\pi} = [0 : 1 : 0]$ oder $g = [0 : -m : 1]$ für ein $m \in \mathbb{E}$.

(6b α) Ist $g^{\pi} = [0 : 0 : 1]$, so gilt wegen $((1 : 0 : 1)^H)^{\beta} \subseteq K \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ bzw. $((1 : 0 : 1)^U)^{\beta} \subseteq K$, daß $g \cap \mathcal{O} \subseteq (1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}}$ ist. Da andererseits $(K(1))^{\beta} \supseteq ((1 : 0 : 1)^M)^{\beta} \supset (1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} \cap \mathcal{O}$ gilt wegen $M \geq M_1$, folgt $K(1)^{\beta} \cap (1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} \subseteq \mathcal{O}$. Der von $(1 : 0 : 0)$ verschiedene Schnittpunkt von g mit $(K(1))^{\beta}$ liegt wegen $g^{\pi} = [0 : 0 : 1]$ in $(1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}}$ und ist wegen $(K(1))^{\beta} \cap (1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} \subseteq \mathcal{O}$ ein Punkt auf \mathcal{O} , d.h. $|\mathcal{O} \cap g| = 2$.

(6b β) Wenn $g^{\pi} = [0 : -m^{\pi} : 1]$ ist und $m \in \mathbb{E}$, schneidet g die Menge $(1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} \cap \mathcal{O} = (1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} \cap K(1)^{\beta}$ genau einmal, nämlich in $(1 : 0 : 0)$, da $(1 : 0 : 0)$ ein regulärer Punkt von K ist (vgl. Bem. 4). Der zweite Schnittpunkt von g^{π} mit K ist dann gegeben durch $S = (1 : 2a^{\pi}m^{\pi} : 2a^{\pi}(m^{\pi})^2) = (1 : 2a^{\pi}m^{\pi} : \frac{1}{2a^{\pi}}(2a^{\pi}m^{\pi})^2)$. Da für jeden Kegelschnitt $(K(1 + \epsilon_i))^{\beta}$ das Bild unter π dasselbe ist, nämlich K , gilt für jedes $i \in \{0, \dots, p-1\}$:

Die Gerade g schneidet $(K(1 + \epsilon_i))^{\beta}$ in $S^{\pi^{-1}}$ genau einmal, denn S ist regulärer Punkt von K .

Andererseits gilt für jedes $y \in \mathbb{F}$ bzw. $P_y := (1 : a^{\pi}y : \frac{1}{2a^{\pi}}(a^{\pi}y)^2) \in K$:

$$\bigoplus \left\{ \begin{array}{l} \exists! i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ mit} \\ \mathcal{O} \cap P_y^{\pi^{-1}} = (K(1 + \epsilon_i))^{\beta} \cap P_y^{\pi^{-1}} \end{array} \right.$$

Wir beweisen zuerst die Existenz. Betrachte für $i \in \{0, \dots, r-1\}$ die konjugierte Matrix C_i ,

$$C_i := BA_iB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ av_i & u_i & atv_i \\ t^{-1}(u_i - 1) & v_i & u_i \end{pmatrix}, \quad u_i^{\pi} = 1, u_i^2 - atv_i^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1, \dots, r-1 \\ h & \text{für } i = 0 \end{cases}.$$

Es ist C_i^π wohldefiniert, denn $\forall i \in \{1, \dots, r-1\} \exists! s(v_i) \in \mathbb{A}$, so daß $u_i = 1 + t(\frac{a}{2}v_i^2 + ts(v_i))$ ist, für $i = 0 \exists! s(v_0) \in \mathbb{A}$, so daß $u_0 = 1 + t(\frac{a}{2}v_0^2 + ts(v_0))$ ist, wobei $u_i^2 - atv_i^2 = 1$ ist für $i = 1, \dots, r-1$ und $u_0^2 - atv_0^2 = h$. Damit ist

$$C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ av_i & 1 + t(\frac{a}{2}v_i^2 + ts(v_i)) & atv_i \\ \frac{a}{2}v_i^2 + ts(v_i) & v_i & 1 + t(\frac{a}{2}v_i^2 + ts(v_i)) \end{pmatrix} \text{ sowie } C_i^\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^\pi b_i & 1 & 0 \\ \frac{a^\pi}{2} b_i^2 & b_i & 1 \end{pmatrix},$$

also wird die Gruppe $H^{\pi \circ \beta}$ induziert von

$$(H')^{\pi \circ \beta} = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^\pi b_i & 1 & 0 \\ \frac{a^\pi}{2} b_i^2 & b_i & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}) : i = 0, \dots, r-1 \right) \right\rangle.$$

Man kann leicht nachrechnen, daß für jedes r -Tupel $(n_0, \dots, n_{r-1}) \in \{0, \dots, p-1\}^r$ gilt:

$$(C_0^{n_0} \cdot C_1^{n_1} \cdot \dots \cdot C_{r-1}^{n_{r-1}})^\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^\pi (\sum n_i b_i) & 1 & 0 \\ \frac{1}{2a^\pi} (a^\pi \sum n_i b_i)^2 & \sum n_i b_i & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn man nun $GF(p)$ mit $\{0, \dots, p-1\}$ identifiziert, hat man demnach:

$$\begin{aligned} (H')^{\pi \circ \beta} &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^\pi (\sum n_i b_i) & 1 & 0 \\ \frac{1}{2a^\pi} (a^\pi \sum n_i b_i)^2 & \sum n_i b_i & 1 \end{pmatrix} : n_i \in GF(p), i \in \{0, \dots, r-1\} \right) \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^\pi y & 1 & 0 \\ \frac{1}{2a^\pi} (a^\pi y)^2 & y & 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{F} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Es ist also $H^\pi/M_1^\pi \cong H^{\pi \circ \beta}/M_1^{\pi \circ \beta} \cong (\mathbb{F}, +)$, wobei M_1^β regulär auf $(1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} \cap K(1)^\beta$ operiert. Dann operiert $(H^\beta)^\pi$ regulär auf $K \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$. Da M_1^β regulär auf $(1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} \cap K(1)^\beta$ ist und $(H^\beta)^\pi$ regulär auf $K \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$, ist die Existenz gezeigt.

Zur Eindeutigkeit:

Angenommen, es existieren zwei Punkte P_i, P_k auf \mathcal{O} und ein $y \in \mathbb{F}$, so daß gilt:

$$P_i^\pi = P_k^\pi = (1 : a^\pi y : \frac{1}{2a^\pi} (a^\pi y)^2), P_i \in (K(1 + \epsilon_i))^\beta, P_k \in (K(1 + \epsilon_k))^\beta, i \neq k, i, k \in \{0, \dots, p-1\}.$$

Dann existieren $\gamma_i \in H^\beta, \gamma_k \in H^\beta$ mit $\gamma_i((1 : 0 : 0)) = P_i, \gamma_k((1 : 0 : 0)) = P_k$. Betrachte $\gamma := \gamma_i^{-1} \gamma_k$. Es ist $\gamma^\pi = id$ und deshalb $\gamma((1 : 0 : 0)) = \gamma_i^{-1}(P_k) \in (1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}}$, also $\gamma_i^{-1} \gamma_k \in M_1^\beta$.

Wegen $K(1)^\beta \cap (1 : \mathbb{M} : \mathbb{M}) = (1 : 0 : 0)^{M_1^\beta}$ folgt schließlich $i = k$.

Damit ist für jede Gerade $g = [0 : -m : 1]$, $m \in \mathbb{E}$, gezeigt:

$$|g \cap \mathcal{O}| = 2$$

(6b γ) Betrachte nun Geraden g mit $g^\pi = [0 : 1 : 0]$ und $(1 : 0 : 0) \in g$. Für $g = [0 : 1 : 0]$ ist $g \cap \mathcal{O} = \{(1 : 0 : 0), (1 : 0 : -2t^{-1})\}$, da $(1 : 0 : -1) = (1 : 0 : 1)^J \in \mathcal{O}'$ ist und $(1 : 0 : -1)^\beta = (1 : 0 : -2t^{-1})$. Für $g = [0 : -t^{-k} m : 1]$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{E}$ betrachte J^β , induziert durch

$$BJ'B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2t^{-1} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie $g^{(J^\beta)} = [2t^{-1} : -t^{-k} m : 1] =: \widehat{g}$,

$$\widehat{g}^\pi = \left\{ \begin{array}{ll} [2 : -m^\pi : 0] & \text{für } k = 1 \\ [0 : 1 : 0] & \text{für } k \geq 1 \end{array} \right\}.$$

Da g die Menge $(1 : 0 : 0)^{H^\beta} = \mathcal{O} \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ genau einmal schneidet (in $(1 : 0 : 0)$), schneidet \widehat{g} die Menge $(1 : 0 : 0)^{H^\beta J^\beta} = \mathcal{O} \cap (0 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$ genau einmal (in $(1 : 0 : -2t^{-1})$). Da $(\mathcal{O} \cap (0 : 0 : 1)^{\pi^{-1}})^{J^\beta} = \mathcal{O} \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ ist, schneidet \widehat{g} die Menge $\mathcal{O} \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ genau einmal, denn einerseits gilt für alle $i \in \{0, \dots, p-1\}$:

Die Gerade \widehat{g} schneidet $(K(1 + \epsilon_i))^\beta \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ genau einmal, da jeder Punkt des Ovals $K = ((K(1 + \epsilon_i))^\beta)^\pi$ regulär ist.

Andererseits folgt wegen \bigoplus , daß \widehat{g} die Menge $\mathcal{O} \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ genau einmal schneidet. Insgesamt also schneidet g die Menge $\mathcal{O} \cap (0 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} = (\mathcal{O} \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}))^{J^\beta}$ genau einmal, also ist $|g \cap \mathcal{O}| = 2$.

Zuletzt betrachten wir noch die Gerade $[0 : 0 : 1]$. Wegen $[0 : 0 : 1]^\pi \cap K = (1 : 0 : 0)$ ist $[0 : 0 : 1] \cap \mathcal{O} \subseteq [0 : 0 : 1] \cap K(1)^\beta \cap (1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}}$, da aber $[0 : 0 : 1]$ Tangente an $K(1)^\beta$ in $(1 : 0 : 0)$ ist, folgt: $[0 : 0 : 1]$ ist Tangente an \mathcal{O} .

Damit ist gezeigt, daß jede von der Tangente $[0 : 0 : 1]$ verschiedene Gerade durch $(1 : 0 : 0)$ die Menge \mathcal{O} genau zweimal schneidet. Da U^β transitiv auf \mathcal{O} operiert, folgt, daß \mathcal{O} ein Oval ist, also auch \mathcal{O}' .

(6c) Trivialerweise hat das Oval $\mathcal{O}' = (1 : 0 : 1)^U$ eine transitive Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}'} \geq U$. Es gilt sogar $G_{\mathcal{O}'} = U$, $N_{\mathcal{O}'} = \langle M, J \rangle$.

Auf den Beweis verzichten wir hier. Jedenfalls operiert U scharf einfach transitiv auf \mathcal{O}' , d.h. $U = G_{\mathcal{O}'}$ operiert scharf einfach transitiv auf \mathcal{O}' . \square

HILFSSATZ 16 (Ovale und Kegelschnitte einer Passantenschar vom Äquivalenztyp $o(\alpha) = 0$)
Es sei \mathbb{K} ein lokaler Körper mit Restklassenkörper \mathbb{F} und $\text{char}\mathbb{F} = p \neq 2$.

Für die Menge $(\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\}$ der Einheitswurzeln in \mathbb{K} , deren algebraische Ordnung eine p -Potenz ist, gelte entweder $(\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\} = \emptyset$ oder $1 + \epsilon \in (\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\} \Rightarrow o(\epsilon) = 1$.

Dann folgt:

Es existiert kein echtes T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe, an dem mindestens zwei Kegelschnitte einer Passantenschar vom Äquivalenztyp $o(\alpha) = 0$ beteiligt sind.

Beweis: Wir nehmen an, daß $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ein T-Oval mit transitiver Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$ ist, an dem mindestens zwei verschiedene Kegelschnitte einer Passantenschar vom Äquivalenztyp $o(\alpha) = 0$ beteiligt sind.

(1) Es sei die Passantenschar, der die Kegelschnitte entstammen, oBdA. gleich

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ K(r) : r \in \left(\mathbb{K}^2 - \frac{1}{\alpha} \mathbb{K}^2 \right) \setminus \{0\} \right\}, \quad K(r) = \left\{ (w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : y^2 = \frac{1}{\alpha} x^2 + r w^2 \right\}.$$

Wir können annehmen, daß \mathcal{O} den Punkt $(1 : 0 : 1) \in K(1)$ enthält und auf einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ von $(1 : 0 : 1)$ mit $K(1)$ übereinstimmt.

Es seien $u, v \in \mathbb{K}$ nicht beide Null und $\sigma \in \{\pm 1\}$. Definiere $A_\sigma(u, v)$ und $A(u, v) \in GL_3(\mathbb{K})$ wie folgt:

$$A_\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & \sigma \alpha v \\ 0 & v & \sigma u \end{pmatrix}, \quad A(u, v) := A_1(u, v)$$

Eine von $A_\sigma(u, v)$ bzw. $A(u, v)$ induzierte Kollineation werde mit $\gamma_\sigma(u, v)$ bzw. $\gamma(u, v)$ bezeichnet und es sei dann $\delta(\gamma_\sigma(u, v)) := \delta(A_\sigma(u, v)) := u^2 - \alpha v^2$.

(2) Es ist $\mathcal{O}^\pi \subseteq (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ und die Gruppe $G_{\mathcal{O}}$ ist eine Untergruppe der Gruppe $\tilde{G} = G \rtimes \langle I \rangle$, die induziert wird von folgender Gruppe $\tilde{G}' = G' \rtimes \langle I' \rangle$:

$$G' = \{A(u, v) \in GL_3(\mathbb{K}) : \delta(A(u, v)) \in \mathbb{E}_0\}, \quad I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Daß $G_{\mathcal{O}} \leq \tilde{G}$ ist, berechnet sich wie im Teil (2) des Beweises des letzten Hilfssatzes. Dabei geht auch Satz 22 (III) ein. Man beachte jedoch, daß hier nicht $\delta(A(u, v)) \in \mathbb{E}_0^2$ sein muß. Es ist $\mathcal{O} \subseteq (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ wegen $\mathcal{O} \subseteq \bigcup_{\eta \in \mathbb{E}_0} K(\eta)$ und $(K(\eta))^\pi \cap [\infty] = \emptyset$ für alle $\eta \in \mathbb{E}_0$. Insbesondere ist $G_{\mathcal{O}}^\pi$ wohldefiniert, da G^π und I^π wohldefiniert sind.

(3) Der Punkt $(1 : 0 : -1)$ ist ein Punkt von \mathcal{O} und es existiert eine Involution in $G_{\mathcal{O}}$, die $(1 : 0 : 1)$ auf $(1 : 0 : -1)$ abbildet und

$$\text{entweder von } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oder von } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

induziert wird (vgl. Beweis von Hilfssatz 15, Schritt (3a)).

(4) Für je zwei verschiedene Geraden g, h in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ gilt:

$$\mathcal{O}^\pi \neq g \cup h, \quad \mathcal{O}^\pi \neq g \cup h \setminus g \cap h$$

Wegen $\mathcal{O} \subset (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ ist $\mathcal{O}^\pi \cap [\infty] = \emptyset$. Deshalb kann nicht $\mathcal{O}^\pi = g \cup h$ sein für zwei Geraden in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, weil sowohl g als auch h die Gerade $[\infty]$ schneidet. Angenommen, es existieren zwei verschiedene Geraden g, h in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ mit $\mathcal{O}^\pi = g \cup h \setminus g \cap h$. Da $(1 : \mathbb{M} : \mathbb{M}) \cap \left(\bigcup_{\eta \in \mathbb{E}_0} K(\eta)\right) = \emptyset$ ist, ist $g \neq [0 : 1 : 0]$ und $h \neq [0 : 1 : 0]$ bzw. $(1 : 0 : 0) \notin \mathcal{O}^\pi$. Die Punkte $(1 : 0 : 1)$ und $(1 : 0 : -1)$ sind deshalb reguläre Bildpunkte mit Tangenten $[-1 : 0 : 1]$ bzw. $[1 : 0 : 1]$ (vgl. Bem. 4(3)). Also ist oBdA. $g = [-1 : 0 : 1], h = [1 : 0 : 1], g \cap h = (0 : 1 : 0)$. Da $G_{\mathcal{O}}^\pi$ wohldefiniert ist, ist $G_{\mathcal{O}}^\pi$ eine Untergruppe des Stabilisators des Punktes $(0 : 1 : 0)$ in der $PGL_3(\mathbb{F})$. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & \sigma \alpha^\pi v \\ 0 & v & \sigma u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{F}, \sigma \in \{\pm 1\},$$

liefert $v = 0$ und deshalb wird $G_{\mathcal{O}}^\pi$ von einer Untergruppe folgender Matrizen­gruppe induziert:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & \sigma u \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}) : u \in \mathbb{F}_* \right\}$$

Für $\{(1 : 0 : 1), (1 : 0 : -1)\} \subseteq \mathcal{O}^\pi$ gilt dann:

$$\{(1 : 0 : 1), (1 : 0 : -1)\}^{G_{\mathcal{O}}^\pi} \subseteq [0 : 1 : 0]$$

Dann ist $G_{\mathcal{O}}^\pi$ aber nicht transitiv auf \mathcal{O}^π , also auch $G_{\mathcal{O}}$ nicht transitiv auf \mathcal{O} .

(5) Für alle Geraden g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ gilt: $\mathcal{O}^\pi \not\subseteq g$

Angenommen, \mathcal{O}^π ist in einer Geraden g enthalten. Wegen $(1 : 0 : 1), (1 : 0 : -1) \in \mathcal{O}^\pi$ ist dann $g = [0 : 1 : 0]$.

(5a) Zuerst wird gezeigt, daß $(\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\} \neq \emptyset$ ist.

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & \sigma \alpha^\pi v \\ 0 & v & \sigma u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \alpha^\pi v \\ \sigma u \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{F}, \quad \sigma \in \{\pm 1\}, \quad (1 : \sigma \alpha^\pi v : \sigma u) \in [0 : 1 : 0]$$

liefert $v = 0$ und deshalb wird $G_{\mathcal{O}}$ von einer Untergruppe folgender Matrizengruppe induziert:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & \sigma \alpha v \\ 0 & v & \sigma u \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : o(v) \geq 1, \quad u^2 - \alpha v^2 \in \mathbb{E}_0 \right\}$$

Es sei nun für $m \in \mathbb{K}$ die Gerade $g_m := [-1 : -m : 1]$. Offensichtlich ist g_0 Tangente an \mathcal{O} . Für $o(m) \geq 1$ ist $|g_m \cap K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}| = 2$, für $o(m) = 0$ ist $g_m \cap K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} = (1 : 0 : 1)$. Falls $\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1 = \{1\}$ ist, folgt sofort ein Widerspruch, denn für alle $\eta \in \mathbb{E}_0$ mit $\eta^\pi \neq 1$ ist $K(\eta) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} = \emptyset$, also $\mathcal{O} \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} = K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$. Da $\mathcal{O}^\pi \subset [0 : 1 : 0]$ ist, existiert für $o(m) = 0$ außerhalb von $(1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$ kein weiterer Schnittpunkt von g_m mit \mathcal{O} , was der Eindeutigkeit der Tangente an \mathcal{O} in $(1 : 0 : 1)$ widerspricht.

Es folgt $(\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\} \neq \emptyset$ und aufgrund der Voraussetzungen des hier zu beweisenden Satzes ist jedes Element aus $(\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\}$ von der Form $1 + \epsilon, \epsilon = t e_\epsilon, e_\epsilon \in \mathbb{E}$.

(5b) Wir betrachten nun für eine geeignete Kollineation τ das Oval \mathcal{O}^τ , so daß dessen Bild $(\mathcal{O}^\tau)^\pi$ aus zwei Geraden ohne deren Schnittpunkt besteht.

Da \mathcal{O} die Punkte $(1 : 0 : 1)$ und $(1 : 0 : -1)$ enthält, gilt $\mathcal{O}^\pi \subseteq [0 : 1 : 0]$. Weil für alle $\eta \in \mathbb{E}_0$ die Menge $K(\eta) \cap \left((1 : 0 : 0)^{\pi^{-1}} \cup (0 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} \right)$ leer ist, gilt sogar $\mathcal{O} \subseteq (1 : \mathbb{M} : \mathbb{E})$.

Es sei nun $m \in \mathbb{N}$ so, daß \mathcal{O} in $(1 : t^m \mathbb{A} : \mathbb{E})$ enthalten ist, aber nicht in $(1 : t^{m+1} \mathbb{A} : \mathbb{E})$. Wenn τ die von der Matrix $T \in GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-m} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induzierte Kollineation ist, werden die Kegelschnitte $(K(\eta))^\tau$ repräsentiert von Matrizen $(Q(\eta))^\tau$, gegeben durch

$$(Q(\eta))^\tau = \begin{pmatrix} 1 - \eta & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{t^{2m}}{\alpha} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta \in \mathbb{E}_0.$$

Für \mathcal{O}^τ gilt dann:

$$\mathcal{O}^\tau \subset (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$$

$$\mathcal{O}^\tau \not\subset (1 : \mathbb{M} : \mathbb{A})$$

$$\mathcal{O}^\tau \cap (1 : \mathbb{A} : -1 + \mathbb{M}) = \emptyset$$

$$\{(1 : 0 : 0), (1 : 0 : -2)\} \subset \mathcal{O}^\tau \cap K(1)^\tau$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}^\tau \cap ((1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) \setminus (1 : \mathbb{M} : \mathbb{A})) \neq \emptyset$, also ist $(\mathcal{O}^\tau)^\pi$ nicht in $[0 : 1 : 0]$ enthalten, enthält aber zwei Bildpunkte, die auf der Geraden $[0 : 1 : 0]$ liegen. Deshalb kann $(\mathcal{O}^\tau)^\pi$ nicht in einer Geraden enthalten sein.

Ein Oval ist das π -Bild von \mathcal{O}^τ auch nicht, denn wenn man die Tangenten an die Kegelschnitte $(K(\eta))^\tau$ in Punkten aus $(1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ betrachtet, so kann man nachrechnen, daß ihr π -Bild gleich

$[a : 0 : 1]$ ist für ein $a \in \mathbb{F}$. Demnach treffen sich die Bilder dieser Tangenten im Punkt $(0 : 1 : 0)$, was Bemerkung 4 widerspricht, wenn $(\mathcal{O}^\tau)^\pi$ ein Oval wäre.

Es existieren also zwei verschiedene Geraden g, h in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ mit $(\mathcal{O}^\tau)^\pi = g \cup h$ oder $(\mathcal{O}^\tau)^\pi = g \cup h \setminus g \cap h$. Wegen $\mathcal{O}^\tau \subseteq (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ bzw. $(\mathcal{O}^\tau)^\pi \cap [\infty] = \emptyset$ einerseits, andererseits wegen $g \cap [\infty] \neq \emptyset$ sowie $h \cap [\infty] \neq \emptyset$, gilt $(\mathcal{O}^\tau)^\pi = g \cup h \setminus g \cap h$ und $g \cap h \in [\infty]$.

(5c) Ist $\eta \in \mathbb{E}_0$ und $K(\eta)$ an \mathcal{O} beteiligt, so folgt $\eta^\pi = 1$.

Betrachte die Punkte $(1 : 0 : 0), (1 : 0 : -2) \in \mathcal{O}^\tau \cap K(1)^\tau$ mit ihren Tangenten $[0 : 0 : 1], [2 : 0 : 1]$. Die Bilder dieser beiden Punkte müssen regulär sein:

Klar ist, daß mindestens einer dieser Bildpunkte regulär ist (vgl. Bem. 4), etwa oBdA. $(1 : 0 : 0)$. Wenn g die Gerade ist, auf der $(1 : 0 : 0)$ liegt, ist wegen der Regularität dann $g = [0 : 0 : 1]$. Die andere Gerade h muß g im Bildpunkt $(1 : 0 : -2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ schneiden, falls dieser nicht regulär ist. Dieser Punkt liegt aber nicht auf g , also ist auch $(1 : 0 : -2)$ regulär.

Es folgt $g = [0 : 0 : 1], h = [2 : 0 : 1]$ sowie $(\mathcal{O}^\tau)^\pi = g \cup h \setminus g \cap h$. Für eine Einheitswurzel $\eta \in \mathbb{E}_0$ mit $\eta^\pi \neq 1$ betrachte die Menge $(K(\eta)^\tau \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}))^\pi \cap (g \cup h)$. Es ist $(K(\eta)^\tau)^\pi = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : (1 - \eta^\pi)w^2 + 2wy + y^2 = 0\}$ und deshalb

$$(K(\eta)^\tau \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}))^\pi = \begin{cases} \{(1 : x : -1 \pm \sqrt{\eta^\pi}) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) : x \in \mathbb{F}\} & \text{für } \eta \in \mathbb{K}^2 \\ \emptyset & \text{für } \eta \notin \mathbb{K}^2 \end{cases}.$$

In beiden Fällen ist $(K(\eta)^\tau \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}))^\pi \cap (g \cup h) = \emptyset$, wenn $\eta^\pi \neq 1$ ist. Deshalb kann keiner der Kegelschnitte $K(\eta)$ mit $\eta^\pi \neq 1$ an \mathcal{O} beteiligt sein.

(5d) Wir betrachten nun für eine geeignete Kollineation β das Oval $\mathcal{O}^{\beta \circ \tau}$ sowie dessen Bild $\mathcal{O}^{\pi \circ \beta \circ \tau}$ und leiten einen Widerspruch her.

Es sei β die von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

repräsentierte Kollineation. Für $1 + te_\epsilon \in (\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\}$ wird dann $(K(1 + te_\epsilon))^{\beta \circ \tau}$ repräsentiert von der Matrix $(Q(1 + te_\epsilon))^{\beta \circ \tau}$ mit

$$(Q(1 + te_\epsilon))^{\beta \circ \tau} = \begin{pmatrix} -e_\epsilon & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{t^{2m-1}}{\alpha} & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix},$$

außerdem wird $K(1)^{\beta \circ \tau}$ repräsentiert von $Q(1)^{\beta \circ \tau}$ mit

$$Q(1)^{\beta \circ \tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{t^{2m-1}}{\alpha} & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Es sei $\mathcal{O}' = \mathcal{O}^{\beta \circ \tau}$.

Da für alle $f \in \mathbb{F}$ ein Punkt $(1 : x : z) \in \mathcal{O}^\tau \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ existiert mit $(1 : x : z)^\pi = (1 : f : 0) \in [0 : 0 : 1]$, existiert für jedes $f \in \mathbb{F}$ auch ein Punkt $(1 : x : y) \in \mathcal{O}' \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ mit $x^\pi = f$, nämlich $(1 : x : y) = (1 : x : z)^\beta = (1 : x : t^{-1}z)$. Wegen $((1 : 0 : -2)^\beta)^\pi = (1 : 0 : -2t^{-1})^\pi = (0 : 0 : 1)$ ist demnach $(\mathcal{O}')^\pi$ nicht in einer Geraden enthalten. Um einzusehen, daß $(\mathcal{O}')^\pi$ kein Oval ist, betrachte wieder Punkte $(1 : x : y) \in (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$ und, falls $(1 : x : y) \in \mathcal{O}' \cap K(1 + te_\epsilon)^{\beta \circ \tau}$

ist für $1 + te_\epsilon \in \mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1$, die Tangenten durch $(1 : x : y)$ an $K(1 + te_\epsilon)^{\beta\circ\tau}$. Für $e_\epsilon \neq 0$ ist das Bild so einer Tangente gleich $[y^\pi - e_\epsilon^\pi : 0 : 1]$, für $e_\epsilon = 0$ (d.h. $(1 : x : y) \in K(1)^{\beta\circ\tau}$) hat man $[y^\pi : 0 : 1]$. All diese Geraden treffen sich im Punkt $(0 : 1 : 0)$, deshalb kann $(\mathcal{O}')^\pi$ kein Oval sein (vgl. Bem. 4). Also existieren zwei verschiedene Geraden l_1, l_2 in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, so daß $(\mathcal{O}')^\pi = l_1 \cup l_2$ ist oder $(\mathcal{O}')^\pi = l_1 \cup l_2 \setminus l_1 \cap l_2$.

Betrachte nun die Punkte $(1 : 0 : 0), (1 : 0 : -2t^{-1}) \in \mathcal{O}' \cap K(1)^{\beta\circ\tau}$ sowie die zugehörigen Bildpunkte $(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1) \in \mathcal{O}'^\pi$. Wenn diese Punkte beide regulär wären, hätte man (wieder wegen Bem. 4) oBdA. $l_1 = [0 : 0 : 1], l_2 = [2t^{-1} : 0 : 1]^\pi = [1 : 0 : 0] = [\infty]$. Da für $1 + te_\epsilon \in (\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\}$ jedoch $(K(1 + te_\epsilon)^{\beta\circ\tau} \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}))^\pi \cap [0 : 0 : 1] = \emptyset$ ist, wie man leicht nachrechnet, folgt

$$\mathcal{O}' \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) = K(1)^{\beta\circ\tau} \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}).$$

Andererseits ist $(1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})^{(\beta\circ\tau)^{-1}} = (1 : t^m \mathbb{A} : 1 + t\mathbb{A})$ und deshalb

$$\mathcal{O} \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} = K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}.$$

Die Kollineationsgruppe $G_{\mathcal{O}}$ enthält eine Involution, die von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

induziert wird und $(1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$ auf $(1 : 0 : -1)^{\pi^{-1}}$ abbildet (vgl. (3)). Da keine Kegelschnitte $K(\eta)$ mit $\eta^\pi \neq 1$ an \mathcal{O} beteiligt sind, ist $\mathcal{O} \subset (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} \cup (1 : 0 : -1)^{\pi^{-1}}$, also $\mathcal{O} \subset K(1), \mathcal{O} \neq K(1)$. Widerspruch.

Die Punkte $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1) \in \mathcal{O}'^\pi$ sind also nicht beide regulär. Wir können oBdA. annehmen, daß $(0 : 0 : 1)$ regulär ist und $(1 : 0 : 0)$ nicht. Dann ist oBdA. $l_1 = [\infty]$ und $(1 : 0 : 0) = l_2 \cap l_1$, Widerspruch.

(6) Wir zeigen, daß \mathcal{O}^π kein Oval ist.

Aus (4), (5), Satz 3 und der Annahme, daß \mathcal{O} ein Oval ist, folgt, daß \mathcal{O}^π ein Oval ist, also $\mathcal{O}^\pi = K$ für einen Kegelschnitt K in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$. Da $(1 : 0 : 1)$ und $(1 : 0 : -1)$ Punkte von K sind und $[-1 : 0 : 1]$ bzw. $[1 : 0 : 1]$ die Tangenten an K in $(1 : 0 : 1)$ bzw. $(1 : 0 : -1)$ sind einerseits, andererseits der Punkt $(1 : 0 : 0)$ kein Punkt auf K ist, wird K repräsentiert von einer Matrix $Q(K)$ mit

$$Q(K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{K}_*.$$

Aus $K \cap [\infty] = \emptyset$ folgt weiter, daß d keine Quadratzahl in \mathbb{F} ist.

(6a) Ist $\eta \in \mathbb{E}_0$ und $K(\eta)$ an \mathcal{O} beteiligt, so ist $\eta^\pi = 1$.

Es sei $\eta \in \mathbb{E}_0$ und $K(\eta)$ an \mathcal{O} beteiligt. Für $(1 : x : y) \in K(\eta) \cap \mathcal{O}$ ist die Tangente $T_{(1:x:y)}^{\mathcal{O}}$ an \mathcal{O} in $(1 : x : y)$ gleich der Tangente $T_{(1:x:y)}^{K(\eta)} = [-\eta : -\frac{1}{\alpha}x : y]$ an $K(\eta)$ in $(1 : x : y)$. Dann muß für $(1 : x : y) \in \mathcal{O}$ wegen Bemerkung 4(2) gelten:

$$[-\eta^\pi : -\frac{1}{\alpha^\pi}x^\pi : y^\pi] = [1 : dx^\pi : -y^\pi] = [-1 : -dx^\pi : y^\pi]$$

Daraus folgt für $y^\pi \neq 0$ und $(1 : x : y) \in \mathcal{O} \cap K(\eta)$, daß $\eta^\pi = 1$ ist, also:

$$(1 : x : y) \in \mathcal{O}, y \in \mathbb{E} \implies (1 : x^\pi : y^\pi) \in (K(1))^\pi$$

Da K höchstens zwei Punkte $(1 : x' : y')$ besitzt mit $y' = 0$, folgt $|K \cap K(1)^\pi| \geq q - 1$ für $q = p^n, n \in \mathbb{N}$, und $\mathbb{F} = GF(q)$.

Ist $q - 1 \geq 5$, so ist $K = K(1)^\pi$, denn fünf Punkte in allgemeiner Lage bestimmen bekanntlich einen Kegelschnitt eindeutig. Es ist aber auch $K(\eta)^\pi \cap K(1)^\pi = \emptyset$ für $\eta^\pi \neq 1$ und deswegen dann $\mathcal{O} \cap K(\eta) = \emptyset$ für $\eta^\pi \neq 1$.

Ist $q = p = 3$, so ist der Eintrag d der Matrix $Q(K)$ gleich 1 oder -1 , also $K = K(1)^\pi$ oder $K = K(-1)^\pi$. Da $K(1)^\pi \cap K(-1)^\pi = \emptyset$ ist und $(1 : 0 : 1)$ sowie $(1 : 0 : -1)$ auf K liegen, folgt $K(1)^\pi = K$ und $\mathcal{O} \cap K(\eta) = \emptyset$ für $\eta^\pi \neq 1$.

Für $q = p = 5$ ist ebenfalls $K = K(1)^\pi$, denn wäre $K \neq K(1)^\pi$, so wäre der Eintrag d der Matrix $Q(K)$ von $\frac{1}{\alpha}$ verschieden. Dann kann man nachrechnen, daß $K \cap K(1)^\pi = \{(1 : 0 : \pm 1)\}$ ist, also $|K \cap K(1)^\pi| = 2$, im Widerspruch zu $|K \cap K(1)^\pi| \geq 4$. Also ist auch hier kein $K(\eta)$ mit $\eta^\pi \neq 1$ an \mathcal{O} beteiligt.

Insgesamt, wenn J eine Indexmenge ist mit $\{1 + \epsilon_j : j \in J\} = (\mathbb{E}_0 \cap \mathbb{E}_1) \setminus \{1\}, \epsilon_j \neq \epsilon_{j'}$ für $j \neq j', j, j' \in J, \epsilon_j = te_j, e_j \in \mathbb{E}$, ist

$$\mathcal{O} \subseteq \left(\bigcup_{j \in J} K(1 + \epsilon_j) \right) \cup K(1).$$

(6b) Wir betrachten für eine geeignete Kollineation τ das Oval \mathcal{O}^τ , so daß das π -Bild von \mathcal{O}^τ gleich der Vereinigung zweier Geraden (eventuell ohne Schnittpunkt) ist.

Es sei die Matrix $T \in GL_3(\mathbb{K})$ gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ -t^{-1} & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

und die von T repräsentierte Kollineation sei τ . Für $j \in J$ ist dann $K(1 + \epsilon_j)^\tau$ gegeben durch die Matrix

$$Q_j = \begin{pmatrix} -e_j & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{t}{\alpha} & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix},$$

der Kegelschnitt $K(1)^\tau$ habe die Matrix Q_0 ,

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{t}{\alpha} & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Für $(1 : x : y) \in (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) \cap \mathcal{O}^\tau \cap K(1 + \epsilon_j)^\tau$ ist die Tangente an \mathcal{O}^τ dann gleich $[y - e_j : -\frac{t}{\alpha}x : 1 + ty]$, für $(1 : x : y) \in (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) \cap \mathcal{O}^\tau \cap K(1)^\tau$ ist die Tangente an \mathcal{O}^τ gleich $[y : -\frac{t}{\alpha}x : 1 + ty]$. Da die Bilder dieser Tangenten sich im Punkt $(0 : 1 : 0)$ treffen, ist $(\mathcal{O}^\tau)^\pi$ kein Oval (vgl. S. 29). Es gibt auch keine Gerade in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, in der $(\mathcal{O}^\tau)^\pi$ enthalten ist:

Die Punkte $(1 : 0 : 1)^\tau = (1 : 0 : 0)$ und $(1 : 0 : -1)^\tau = (1 : 0 : -2t^{-1})$ liegen auf \mathcal{O}^τ , also enthält $(\mathcal{O}^\tau)^\pi$ die Punkte $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$. Es gibt außerdem mindestens einen Punkt $(1 : x : y) \in \mathcal{O}$ mit $x \in \mathbb{E}$ und $y \in \mathbb{A}$. Dann ist $(1 : x : y)^\tau = (t : x : y - 1)$ und $(t : x : y - 1)^\pi = (0 : x^\pi : y^\pi - 1) \in (\mathcal{O}^\tau)^\pi \cap ([\infty] \setminus \{(0 : 0 : 1)\})$. Also enthält $(\mathcal{O}^\tau)^\pi$ drei nichtkollineare Punkte.

Demnach existieren zwei Geraden g, h in $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ mit $(\mathcal{O}^\tau)^\pi = g \cup h$ oder $(\mathcal{O}^\tau)^\pi = g \cup h \setminus g \cap h$. Die Punkte $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ sind beide reguläre Punkte von $(\mathcal{O}^\tau)^\pi$, denn wäre einer nicht regulär, oBdA. $(1 : 0 : 0)$, so wäre $(1 : 0 : 0) = g \cap h$. Wenn $(0 : 0 : 1) \in h$ ist, ist wegen der Nichtregularität von $(1 : 0 : 0)$ das π -Bild der Tangente an \mathcal{O}^τ in $(1 : 0 : -2t^{-1})$ gleich $h = [0 : 1 : 0]$.

Aber die Tangente an \mathcal{O}^τ in $(1 : 0 : -2t^{-1})$ ist gleich $[1 : 0 : \frac{t}{2}]$, also ihr Bild gleich $[1 : 0 : 0] = [\infty]$. Es folgt, daß $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ beide regulär sind und weiter $h = [\infty], g = [0 : 0 : 1]$.

(6c) Zuletzt zeigen wir, daß $\mathcal{O} \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} = K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$ ist und leiten dazu einen Widerspruch her.

Für $j \in J$ ist $(K(1 + \epsilon_j)^\tau)^\pi$ enthalten in $[1 : 0 : 0] \cup [e_j^\pi : 0 : -2]$, wegen $\mathcal{O}^{\pi \circ \tau} = [1 : 0 : 0] \cup [0 : 0 : 1]$ ist deshalb $\mathcal{O}^\tau \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}) = K(1)^\tau \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A})$. Deshalb ist

$$(\mathcal{O}^\tau \cap (1 : \mathbb{A} : \mathbb{A}))^{\tau^{-1}} = \mathcal{O} \cap (1 : \mathbb{M} : 1 + \mathbb{M}) = K(1) \cap (1 : \mathbb{M} : 1 + \mathbb{M}).$$

Werfen wir nun einen Blick auf $G_{\mathcal{O}^\pi} \cap G_{\mathcal{O}}^\pi \leq B = M \rtimes \langle I^\pi \rangle$, B die Buekenhoutgruppe von $G_{\mathcal{O}^\pi} = G_K$, die von den Involutionen mit Zentrum auf $[\infty]$ und Achse durch $(1 : 0 : 0)$ erzeugt wird (vgl. Def. 8, Seite 74). Die Gruppe M ist zyklisch und hat die Ordnung $q + 1$, d.h. es existiert ein $\gamma_0 \in B$ mit $\langle \gamma_0 \rangle = M, o(\gamma_0) = q + 1$. Diese Buekenhoutgruppe B hat genau zwei verschiedene, auf K (scharf einfach) transitive echte Untergruppen, nämlich $\langle \gamma_0 \rangle$ und $\langle \gamma_0^2, \iota \rangle$, dabei ist $\iota \in MI^\pi$ eine beliebige Involution, deren Achse aber eine Passante bzgl. K ist.

Da $G_{\mathcal{O}}$ transitiv auf \mathcal{O} ist, ist auch $G_{\mathcal{O}}^\pi$ transitiv auf $\mathcal{O}^\pi = K$. Also ist $G_{\mathcal{O}}^\pi = B$ oder $G_{\mathcal{O}}^\pi = \langle \gamma_0 \rangle$ oder $G_{\mathcal{O}}^\pi = \langle \gamma_0^2, \iota \rangle$ für ein $\iota \in MI^\pi$ mit einer Passante als Achse. Da $\mathcal{O} \neq K(1)$ ist, existiert ein $j \in J$, so daß $K(1 + \epsilon_j)$ an \mathcal{O} beteiligt ist. Wegen $\mathcal{O} \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}} = K(1) \cap (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$ ist auch $\mathcal{O} \cap (1 : 0 : -1)^{\pi^{-1}} = K(1) \cap (1 : 0 : -1)^{\pi^{-1}}$, denn die Involution aus (3), die $(1 : 0 : 1)$ auf $(1 : 0 : -1)$ abbildet, hat ein wohldefiniertes π -Bild in der $PGL_3(\mathbb{F})$. Es existiert also ein Punkt $(1 : x' : y') \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) \setminus \{(1 : 0 : \pm 1)\}$ und ein Punkt $(1 : x : y) \in \mathcal{O} \cap K(1 + \epsilon_j)$ mit $(1 : x : y)^\pi = (1 : x' : y')$. Dann existiert wegen der Transitivität von $G_{\mathcal{O}}$ eine Kollineation $\gamma \in G_{\mathcal{O}}$ mit $(1 : 0 : 1)^\gamma = (1 : x : y)$, induziert durch $A_\sigma(u, v) \in \tilde{G}'$,

$$A_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & \sigma \alpha v \\ 0 & v & \sigma u \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{K}, \quad \frac{1}{u^2 - \alpha v^2} = 1 + \epsilon_j, \quad \sigma \alpha v = x, \sigma u = y, (x^\pi, y^\pi) \neq (0, \pm 1).$$

Es ist $\sigma = 1$, denn sonst enthielte wegen

$$(A_{-1}(u, v))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\epsilon_j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\epsilon_j} \end{pmatrix}$$

das Oval die Punkte $(1 : 0 : (\frac{1}{1+\epsilon_j})^k)$ für $k \in \{0, \dots, p-1\}$, das sind mindestens drei kollineare Punkte. Es folgt, daß $\gamma^\pi \in M$ ist und deshalb $(\gamma^{q+1})^\pi = (\gamma^\pi)^{q+1} = id, \gamma^\pi \neq id$. Da $(K(1))^{\gamma^{q+1}} \neq K(1)$ ist wegen $(1 + \epsilon_j)^{q+1} \neq 1$ einerseits, andererseits $\gamma^{q+1}((1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}) = (1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$ gilt wegen $(\gamma^{q+1})^\pi = id$, gibt es in $(1 : 0 : 1)^{\pi^{-1}}$ mindestens einen Punkt auf $\mathcal{O} \setminus K(1)$. Widerspruch. \square

Kapitel 2

Kurven mit unendlichem Stabilisator

GENERALVORAUSSETZUNG: ALLE BETRACHTETEN KÖRPER HABEN EINE VON 2 VERSCHIEDENE CHARAKTERISTIK.

Die hier verwendeten Begriffe und Notationen der projektiven Geometrie finden sich in Abschnitt 1.2.1.

Eines der Ziele dieses Teiles der Arbeit ist es, über einem nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} der Charakteristik $\neq 2$ algebraische Kurven C vom Grad ≥ 2 in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ zu untersuchen, deren Stabilisator G_C in der linearen Kollineationsgruppe $PGL_3(\mathbb{K})$ eine unendliche Gruppe ist. Die zweite zentrale Frage, die behandelt wird, ist, wann zwei oder mehr algebraische Kurven in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ einen unendlichen gemeinsamen Stabilisator in $PGL_3(\mathbb{K})$ haben können. Der Körper \mathbb{K} ist dann natürlich kein endlicher Körper.

Wenn man eine algebraische Kurve $C \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ als die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ auffaßt, ist schlimmstenfalls $C = \emptyset$, z.B. für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $F(w, x, y) = w^2 + x^2 + y^2$. Solche Sonderfälle sollen ausgeschlossen werden durch die Forderung, daß auf C unendlich viele Punkte von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ liegen. Wenn C die Nullstellenmenge von F ist mit

$$F = G_1^{r_1} \cdot \dots \cdot G_n^{r_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r_i \in \mathbb{N}, \quad G_i \text{ irreduzible homogene Polynome in } \mathbb{K}[w, x, y],$$

so besteht C aus den Komponenten C_1, \dots, C_n , wobei C_i die Nullstellenmenge von G_i ist für $i = 1, \dots, n$ und oBdA. $C_i \neq \emptyset$ gilt. Dann hat G_C einen Normalteiler N , für den gilt:

$$N = \bigcap_{i=1}^n G_{C_i}, \quad G_{C_i} \text{ der Stabilisator von } C_i \text{ in der } PGL_3(\mathbb{K})$$
$$[G_C : N] < \infty$$

Kennt man die Stabilisatoren irreduzibler Kurven, so kennt man demnach auch die Stabilisatoren reduzibler Kurven, deshalb kann man sich auf die Betrachtung irreduzibler Kurven beschränken.

Ist der Körper \mathbb{K} nicht algebraisch abgeschlossen, bietet es sich an, die gesamte Situation im algebraischen Abschluß \mathbb{L} von \mathbb{K} zu betrachten. Dabei wird entweder eine Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, gegeben durch das Polynom $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ mit

$$C = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : F(w, x, y) = 0\}, \quad |C| = \infty$$

um ihre nicht- \mathbb{K} -rationalen Punkte erweitert, also

$$C^a := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : F(w, x, y) = 0\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L}),$$

oder aber für eine Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, gegeben durch $F \in \mathbb{L}[w, x, y]$, die Menge $C \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ betrachtet. Die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit ihrer Kollineationsgruppe $PGL_3(\mathbb{K})$ wird dabei kanonisch eingebettet in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ bzw. $PGL_3(\mathbb{L})$: Punkte und Kollineationen werden durch Vektoren und Matrizen bzgl. kanonischer Basen repräsentiert. Ein Punkt $P \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ bzw. eine Kollineation $\alpha \in PGL_3(\mathbb{L})$ ist dann in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ bzw. $PGL_3(\mathbb{K})$ enthalten, wenn P einen Repräsentanten $v \in \mathbb{K}^3$ bzw. α einen Repräsentanten $A \in GL_3(\mathbb{K})$ hat. Wenn nun Γ_{C^a} der Stabilisator von C^a in der $PGL_3(\mathbb{L})$ ist, ist G_C – identifiziert mit $\Gamma_{C^a} \cap PGL_3(\mathbb{K})$ – eine Untergruppe von Γ_{C^a} : Ist $\gamma \in PGL_3(\mathbb{K})$ eine Kollineation, die von der Matrix $A \in GL_3(\mathbb{K})$ repräsentiert wird, so ist C^γ die Nullstellenmenge des Polynoms $F \circ A^{-1}$. Ist $\gamma \in G_C$, so ist $F \equiv F \circ A^{-1}$ und damit $\gamma \in \Gamma_{C^a}$, denn wenn das Polynom einer Kurve unverändert bleibt, dann auch die Kurve selbst.

Hat eine über \mathbb{K} definierte Kurve C eine unendliche Kollineationsgruppe G_C , so ist auch $|\Gamma_{C^a}| = \infty$. Umgekehrt kann G_C keine unendliche Gruppe sein, wenn Γ_{C^a} eine endliche Gruppe ist. Deshalb werden in den folgenden Abschnitten alle irreduziblen algebraischen Kurven über algebraisch abgeschlossenen Körpern \mathbb{L} klassifiziert, die eine unendliche Kollineationsgruppe in der $PGL_3(\mathbb{L})$ gestatten. Außerdem wird untersucht, wann der Schnitt der Kollineationsgruppen verschiedener Kurven in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ eine unendliche Gruppe ist. Es stellt sich heraus, daß das nur für projektiv äquivalente Kurven der Fall sein kann. Sind die Kurven und Gruppen im algebraischen Abschluß \mathbb{L} bekannt, kann man sich mit der Situation über \mathbb{K} auseinandersetzen.

Es ist sinnvoll, die (irreduziblen) algebraischen Kurven einerseits nach ihrem Grad einzuteilen, andererseits zu unterscheiden, ob eine singuläre oder nichtsinguläre Kurve vorliegt. Der erste Abschnitt befaßt sich mit den Kurven vom Grad 2, den Kegelschnitten. Insbesondere der gemeinsame Stabilisator mehrerer Kegelschnitte wird untersucht, denn daß der Stabilisator eines Kegelschnittes für $|\mathbb{K}| = \infty$ eine unendliche Gruppe ist, ist allgemein bekannt (vgl. [5]). Der zweite Abschnitt behandelt nichtsinguläre Kurven vom Grad ≥ 3 , der dritte Abschnitt singuläre Kurven.

2.1 Kegelschnitte

2.1.1 Einführung

Das Folgende ist bekannt und findet sich bei Blaschke [2], Buekenhout [5] sowie Hughes und Piper [7]. Um einheitliche Notationen und Begriffe zur Verfügung zu haben, fassen wir das Nötige hier zusammen.

Es sei in diesem Abschnitt \mathbb{K} ein beliebiger Körper der Charakteristik $\neq 2$. Ein Kegelschnitt K in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist die Nullstellenmenge eines irreduziblen homogenen Polynoms $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ vom Grad 2. Dabei ist zu beachten, daß für nicht algebraisch abgeschlossene Körper diese Nullstellenmenge eventuell leer ist. Diesen Fall wollen wir aber grundsätzlich ausschließen.

Für $F(w, x, y) = aw^2 + 2bwx + 2cwy + dx^2 + 2exy + fy^2$ liegt der Punkt $P = (w : x : y)$ auf dem durch F definierten Kegelschnitt K , wenn

$$(w, x, y) \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \end{pmatrix} =: (w, x, y)Q_K \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ist. Die in dieser Gleichung auftretende Matrix Q_K ist – bis auf multiplikative Vielfache – durch F bzw. K eindeutig bestimmt. Man kann einen Kegelschnitt auch als Menge der absoluten Punkte

einer orthogonalen Polarität auffassen. Deren Wirkung auf Punkte ist dann durch die Matrix Q_K gegeben. Für einen Punkt $P = (w : x : y)$ sei

$$\begin{pmatrix} w' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = Q_K \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Polare von P die Gerade $[w' : x' : y']$. Hat ein Körper \mathbb{K} involutorische Körperautomorphismen, so muß man zwischen orthogonalen und nichtorthogonalen Polaritäten unterscheiden. Nichtorthogonale Polaritäten spielen allerdings bei der Beschreibung von Kegelschnitten keine Rolle. Deshalb verwenden wir den Begriff Polarität und meinen damit immer eine orthogonale Polarität.

Für eine Polarität π sei $A(\pi)$ die Menge der absoluten Punkte von π . Bekanntlich ist entweder $A(\pi) = \emptyset$ oder aber ein Kegelschnitt. Umgekehrt existiert für jeden Kegelschnitt K eine Polarität π mit $A(\pi) = K$.

DEFINITION 7 (a) Es sei Π die Menge aller Polaritäten von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

(b) Es sei $\Pi^* = \{\pi \in \Pi : A(\pi) \neq \emptyset\}$.

(c) Für eine Teilmenge $M \subseteq \Pi$ sei $M^* = \{\pi \in M : A(\pi) \neq \emptyset\}$.

(d) Für $\pi \in \Pi^*$ sei $K_\pi = A(\pi)$ der von π induzierte Kegelschnitt.

(e) Für einen Kegelschnitt K sei π_K die Polarität aus Π^* , für die gilt: $A(\pi_K) = K$.

(f) Ein Dreieck mit Ecken Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnen wir mit $\Delta(Z_1, Z_2, Z_3)$ oder einfach mit Δ . Wenn wir von Dreiecken reden, ist immer vorausgesetzt, daß die drei Ecken paarweise verschieden und nicht kollinear sind.

(g) Es sei $\pi \in \Pi$, P ein Punkt und g eine Gerade der projektiven Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Das Paar (P, g) heißt Pol-Polaren-Paar bzgl. π , wenn $g = P^\pi$ ist.

Ist $\pi \in \Pi^*$ und induziert den Kegelschnitt K_π , so heißt (P, P^π) auch Pol-Polaren-Paar von K .

(h) Es sei $\pi \in \Pi$ und Δ ein Dreieck, dessen Ecken Z_1, Z_2, Z_3 nicht in $A(\pi)$ liegen.

Δ heißt Poldreieck bzgl. π , wenn gilt:

$$Z_j = (Z_k \vee Z_l)^\pi \quad \forall j, k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad j \neq k \neq l \neq j$$

Ist $\pi \in \Pi^*$ und induziert den Kegelschnitt K_π , so heißt Δ auch Poldreieck von K .

(i) Es sei $M = \{\pi_i : i \in I\}$ eine nichtleere Menge von Polaritäten, P ein Punkt und g eine Gerade in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Das Paar (P, g) heißt Pol-Polaren-Paar bzgl. M , wenn für alle $i \in I$ gilt: $g = P^{\pi_i}$.

(j) Es sei $M = \{\pi_i : i \in I\}$ eine nichtleere Menge von Polaritäten und Z_1, Z_2, Z_3 seien drei verschiedene nichtkollineare Punkte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, so daß für jedes $i \in I$ keiner dieser Punkte ein absoluter Punkt von π_i ist.

Das Dreieck mit Ecken Z_1, Z_2, Z_3 heißt Poldreieck bzgl. M , wenn für jedes $i \in I$ gilt:

$$Z_j = (Z_k \vee Z_l)^{\pi_i} \quad \forall j, k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad j \neq k \neq l \neq j$$

(k) Für eine nichtleere Menge $M = \{\pi_i : i \in I\}$ mit $\pi_i \in \Pi^* \forall i \in I$ und $\mathcal{K}_M := \{K_{\pi_i} : i \in I\}$ sei (P, g) ein Pol-Polaren-Paar bzgl. M . Dann sagen wir auch, (P, g) ist ein Pol-Polaren-Paar der Kegelschnittmenge \mathcal{K}_M oder (P, g) ist gemeinsames Pol-Polaren-Paar der Kegelschnitte K_{π_i} .

(l) Für eine nichtleere Menge $M = \{\pi_i : i \in I\}$ mit $\pi_i \in \Pi^* \forall i \in I$ und $\mathcal{K}_M := \{K_{\pi_i} : i \in I\}$ sei Δ ein Poldreieck bzgl. M . Dann sagen wir auch, Δ ist ein Poldreieck der Kegelschnittmenge \mathcal{K}_M oder Δ ist gemeinsames Poldreieck der Kegelschnitte K_{π_i} .

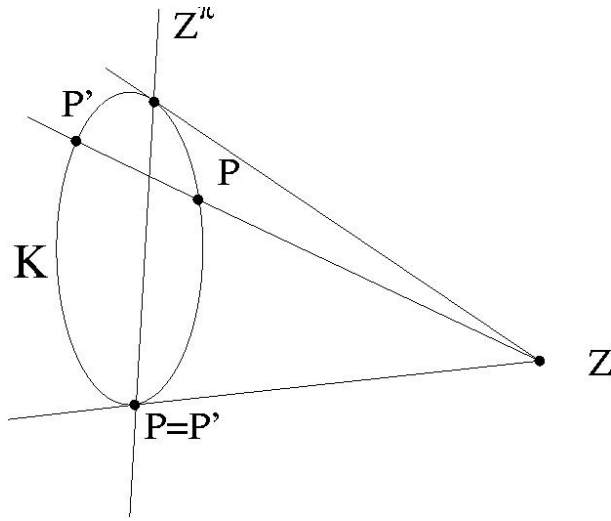


Abbildung 2.1: *Involutionen*

Verlassen wir nun vorerst die Polaritäten und wenden uns dem Stabilisator G_K eines Kegelschnittes K in der linearen Kollineationsgruppe $PGL_3(\mathbb{K})$ zu.

SATZ 17 (vgl. Buekenhout [5]) G_K operiert scharf dreifach transitiv auf den Punkten von K , ist isomorph zur $PGL_2(\mathbb{K})$ und wird von Involutionen erzeugt. Jede Kollineation aus G_K ist Produkt zweier Involutionen aus G_K .

Es sei π die Polarität, deren absolute Punkte den Kegelschnitt K bilden. Jede Involution $I \in G_K$ ist eine Homologie, also eine Perspektivität, deren Zentrum und Achse nicht inzidieren. Zentrum und Achse sind ein Pol-Polaren-Paar bzgl. π . Die Menge aller Involutionen in G_K bezeichnen wir mit \mathcal{I}_K . Zu jedem Punkt $Z \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \setminus K$ existiert genau eine Involution $I_Z \in G_K$ mit Zentrum Z und Achse Z^π , die auf K folgende Wirkung hat (vgl. Abbildung 2.1):

$$I_Z : \left\{ \begin{array}{l} K \longrightarrow K \\ P \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} P, \text{ falls } Z \vee P \text{ Tangente an } K \text{ ist} \\ P' := ((Z \vee P) \cap K) \setminus \{P\}, \text{ falls } Z \vee P \text{ Sekante an } K \text{ ist} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Eine wichtige Klasse von Untergruppen von G_K wird später eine wichtige Rolle spielen. Diese Untergruppen werden von Involutionen erzeugt, deren Zentren kollinear sind:

DEFINITION 8 Für eine Gerade g und einen Kegelschnitt K in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ sei $g_*(K) := g \setminus (K \cap g)$. Die Untergruppe $G_g(K) \leq G_K$ ist dann folgende Gruppe:

$$G_g(K) := \langle I_Z \in \mathcal{I}_K : Z \in g_*(K) \rangle$$

So eine Gruppe $G_g(K)$ nennen wir Buekenhoutgruppe. Ist g Sekante, Tangente oder Passante an K , so heißt $G_g(K)$ Buekenhoutgruppe vom Sekanten-, Tangenten- bzw. Passantentyp.

SATZ 18 (vgl. [5]) $G_g(K)$ läßt sich in ein semidirektes Produkt $G_g(K) = N \rtimes \langle I \rangle$ zerlegen. Dabei ist N abelsch und operiert regulär auf $K \setminus (K \cap g)$. Ferner ist I eine beliebige Involution aus $\{I_Z \in \mathcal{I}_K : Z \in g_*(K)\}$.

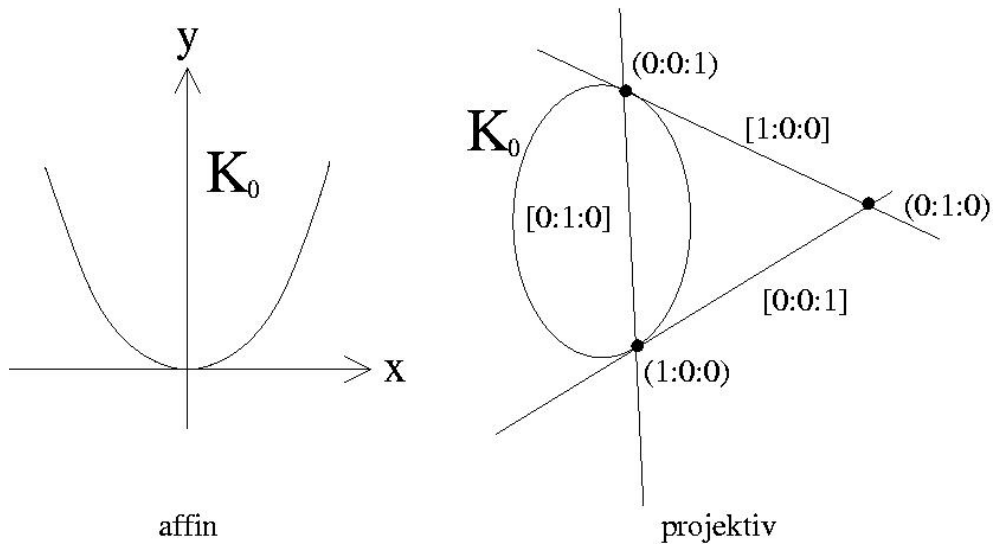


Abbildung 2.2: Der Kegelschnitt K_0 affin und projektiv

Bekanntlich (vgl. [7], S.52) operiert die $PGL_3(\mathbb{K})$ transitiv auf der Menge aller Kegelschnitte von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Will man explizit rechnen, empfiehlt es sich, einen günstigen Vertreter zu wählen. Es sei ab jetzt $K_0 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2\}$, weiter G_{K_0} der Stabilisator von K_0 in der $PGL_3(\mathbb{K})$ und π_0 die Polarität mit $A(\pi_0) = K_0$. Identifiziert man den Punkt $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ der affinen Ebene mit dem projektiven Punkt $(1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, so entspricht der Kegelschnitt K_0 im Affinen der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ (vgl. Abbildung 2.2).

Die Punkte auf K_0 können parametrisiert werden, und zwar

$$K_0 = \{(1 : x : x^2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{K}\} \cup \{(0 : 0 : 1)\}.$$

Führt man wie üblich das Symbol ∞ ein und setzt $(1 : \infty : \infty^2) := (0 : 0 : 1)$ sowie $\mathbb{K}_\infty := \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, so ist $K_0 = \{(1 : x : x^2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{K}_\infty\}$.

Mit Hilfe dieser Parametrisierung kann man das sog. Doppelverhältnis am Kegelschnitt definieren: Für $x \in \mathbb{K}_\infty$ und $P_x = (1 : x : x^2) \in K_0 \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ sei $\tilde{P}_x := (1 : x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{K})$ der entsprechende Punkt auf der projektiven Geraden. Dann ist für vier verschiedene Punkte P_{x_0}, \dots, P_{x_3} auf K_0 ihr Doppelverhältnis D gegeben durch das klassische Doppelverhältnis der zugehörigen Punkte \tilde{P}_{x_i} in $\mathcal{P}_1(\mathbb{K})$ (vgl. [7], S.54):

$$D = DV(P_{x_0}, P_{x_1}; P_{x_2}, P_{x_3}) := DV(\tilde{P}_{x_0}, \tilde{P}_{x_1}; \tilde{P}_{x_2}, \tilde{P}_{x_3})$$

Die spezielle Wahl von K_0 gestattet nicht nur eine Parametrisierung der Punkte auf K_0 , sondern auch eine sehr günstige Darstellung von G_{K_0} , günstig insofern, daß man einen Isomorphismus (vgl. Satz 17, S.74)

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} G_{K_0} & \longrightarrow & PGL_2(\mathbb{K}) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha^\varphi \end{array} \right\}$$

erhält, der sich mit Hilfe des Matrizenkalküls beschreiben läßt.

HILFSSATZ 19 Der Kegelschnitt $K_0 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2\}$ hat in der $PGL_3(\mathbb{K})$ den Stabilisator G_{K_0} , der induziert wird von allen Matrizen $A \in GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Identifiziert man Kollineationen in $PGL_3(\mathbb{K})$ bzw. $PGL_2(\mathbb{K})$, die durch eine Matrix $A \in GL_3(\mathbb{K})$ bzw. $GL_2(\mathbb{K})$ induziert werden, mit $\mathbb{K}_* \cdot A$, so gilt:

Der Isomorphismus $\varphi : G_{K_0} \rightarrow PGL_2(\mathbb{K})$ ist gegeben durch

$$\varphi \left(\mathbb{K}_* \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{K}_* \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Beweis: [7], S.53.

Die Gruppe G_{K_0} kann man in verschiedene nichttriviale Konjugiertenklassen einteilen, die man am einfachsten über das Bild in der $PGL_2(\mathbb{K})$ erhält. Wir beschreiben sie durch fünf Typen \mathcal{R}_i von Matrizen der $GL_2(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{R}_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathcal{S} \right\} \\ \mathcal{R}_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : d \in \widehat{\mathbb{K}} \right\} \\ \mathcal{R}_4 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{R}_5 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta & 1 \end{pmatrix} : \Delta \in \mathbb{K}_*, 1 - 4\Delta \notin \mathbb{K}^2 \right\} \end{aligned}$$

Dabei ist \mathcal{S} ein vollständiges Repräsentantensystem der Nichtquadratklassen von \mathbb{K}_* und $\widehat{\mathbb{K}}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{K}_* \setminus \{-1, 1\}$ mit der Eigenschaft

$$(d \in \widehat{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \frac{1}{d} \notin \mathbb{K}) \wedge (\forall d \in \mathbb{K}_* \setminus \{-1, 1\} : d \in \widehat{\mathbb{K}} \vee \frac{1}{d} \in \widehat{\mathbb{K}}).$$

Der Übersichtlichkeit halber fassen wir die Typen noch einmal in einer Tabelle zusammen:

Typ	Repräsentant für die $PGL_2(\mathbb{K})$	Repräsentant für G_{K_0}	Charakteristisches Polynom	geometrische Eigenschaften
\mathcal{R}_1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\chi(x) = (x+1)(x-1)^2$	auf K hyperbolische Involution mit Zentrum $(0 : 1 : 0)$ und Achse $[0 : 1 : 0]$
\mathcal{R}_2	$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathcal{S} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathcal{S} \right\}$	$\chi(x) = (x+\alpha)(x-\alpha)^2$	auf K elliptische Involution mit Zentrum $(1 : 0 : -\alpha)$ und Achse $[-\alpha : 0 : 1]$
\mathcal{R}_3	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : d \in \bar{\mathbb{K}} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} : d \in \bar{\mathbb{K}} \right\}$	$\chi(x) = (x-1)(x-d)(x-d^2)$	genau drei Fixpunkte $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, zwei davon auf K
\mathcal{R}_4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\chi(x) = (x-1)^3$	genau ein Fixpunkt $(1 : 0 : 0)$, und zwar auf K
\mathcal{R}_5	$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta & 1 \end{pmatrix} : 1 - 4\Delta \notin \mathbb{K}^2 \right\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\Delta & 1 \\ \Delta^2 & -2\Delta & 1 \end{pmatrix}$	$\chi(x) = (x-\Delta)(x^2 + x(2\Delta-1) + \Delta^2)$	genau ein Fixpunkt $(2 : 1 : 2\Delta)$, und zwar ein bzgl. K innerer Punkt

Man beachte insbesondere, daß es in G_{K_0} keine Perspektivitäten gibt bis auf involutorische Homologien. Später brauchen wir für den Beweis des Satzes 20 noch eine Klassifikation der Elemente der Ordnung drei für algebraisch abgeschlossene Körper \mathbb{K} . Für $\text{char}\mathbb{K} \neq 3$ existiert dann eine dritte primitive Einheitswurzel ξ . Man kann, weil G_{K_0} scharf dreifach transitiv auf K_0 ist, oBdA. annehmen, daß ein Element $\gamma \in G_{K_0}$ der Ordnung 3 den Punkt $(1 : 1 : 1)$ auf $(1 : \xi : \xi^2)$, den Punkt $(1 : \xi : \xi^2)$ auf $(1 : \xi^2 : \xi)$ und den Punkt $(1 : \xi^2 : \xi)$ auf $(1 : 1 : 1)$ abbildet. Dann wird γ induziert von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}.$$

Für $\text{char}\mathbb{K} = 3$ existieren keine dritten primitiven Einheitswurzeln. Deshalb kann die Matrix eines Elementes γ der Ordnung 3 nicht diagonalisierbar sein. Es muß folglich γ der Konjugiertenklasse \mathcal{R}_4 entstammen, da für algebraisch abgeschlossene Körper die Klassen \mathcal{R}_2 und \mathcal{R}_5 leer sind.

Zuletzt wollen wir noch definieren, was wir unter Kegelschnittscharen verstehen:

BEMERKUNG und DEFINITION 9 Es sei $\mathcal{K} = \{K_i : i \in I\}$ eine nichtleere Menge von paarweise verschiedenen Kegelschnitten. Für $i \in I$ sei $\pi_i := \pi_{K_i}$ die Polarität, deren absolute Punkte den Kegelschnitt K_i bilden. Die Menge dieser Polaritäten bezeichnen wir mit $\Pi_{\mathcal{K}} = \{\pi_i : i \in I\}$.

Die Menge \mathcal{K} heißt Kegelschnittschar, wenn einer der folgenden Fälle zutrifft:

- (1) Es gibt eine Gerade g und drei verschiedene nichtkollineare Punkte S_1, S_2, F , so daß $g \cap K_i = \{S_1, S_2\}$ ist und $g^{\pi_i} = F \forall i \in I$.
Weiter existiert für jeden Punkt P , der nicht auf dem Dreieck mit Ecken S_1, S_2, F liegt, genau ein $i \in I$ mit $P \in K_i$. Die Menge \mathcal{K} bildet also eine einfache Überdeckung der Punktmenge der projektiven Ebene bis auf dieses Dreieck.
- (2) Es gibt eine Gerade g und einen Punkt F auf g , so daß $g \cap K_i = F$ ist und $g^{\pi_i} = F$ für jedes $i \in I$. Weiter existiert für jeden Punkt P , der nicht auf g liegt, genau ein $i \in I$ mit $P \in K_i$. Die Menge \mathcal{K} bildet also eine einfache Überdeckung der Punktmenge der projektiven Ebene

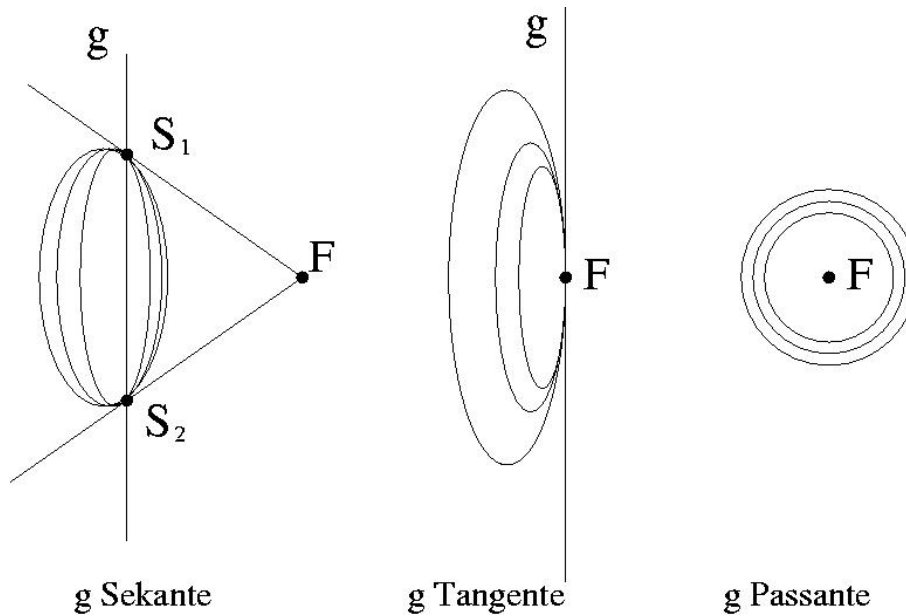


Abbildung 2.3: Kegelschnittscharen

bis auf die Gerade g .

- (3) Es gibt eine Gerade g und einen Punkt $F \notin g$, so daß $g \cap K_i = \emptyset$ ist und $g^{\pi_i} = F$ für jedes $i \in I$. Weiter existiert für jeden Punkt P , der verschieden von F ist und nicht auf g liegt, genau ein $i \in I$ mit $P \in K_i$. Die Menge \mathcal{K} bildet also eine einfache Überdeckung der Punktmenge der projektiven Ebene bis auf die Gerade g und den Punkt F .

Für eine Schar, die dem Fall (1) entspricht, ist die Gerade g eine gemeinsame Sekante der Kegelschnitte der Schar, (g, F) ist ein Pol-Polaren-Paar bzgl. \mathcal{K} . Für $j \in \{1, 2\}$ ist $S_j \vee F$ Tangente an $K_i \forall i \in I$.

Für eine Schar, die dem Fall (2) entspricht, ist die Gerade g eine gemeinsame Tangente der Kegelschnitte der Schar, (g, F) ist ein Pol-Polaren-Paar bzgl. \mathcal{K} .

Für eine Schar, die dem Fall (3) entspricht, ist die Gerade g eine gemeinsame Passante der Kegelschnitte der Schar, (g, F) ist ein Pol-Polaren-Paar bzgl. \mathcal{K} .

Diese drei Typen von Kegelschnittscharen kann man sich an Bildern über den reellen Zahlen veranschaulichen (vgl. Abbildung 2.3, im Bild rechts ist g als unendlich ferne Gerade aufzufassen). Für $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ muß man allerdings mit solchen Bildern vorsichtig sein: Je nachdem, wieviele Quadratklassen der Körper \mathbb{K} besitzt, treten Scharen vom dritten Typ nämlich entweder garnicht auf (z.B. \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen), oder aber es gibt für ein Paar (g, F) verschiedene nicht projektiv äquivalente Scharen vom Typ (3). Näheres hierzu findet sich in Satz 22.

Kegelschnittscharen vom Typ (1) nennen wir auch Scharen vom Sekantentyp oder Sekantenscharen. Analog verwenden wir für Scharen vom Typ (2) bzw. (3) die Begriffe Scharen vom Tangenten- bzw. Passantentyp oder Tangenten- bzw. Passantenscharen.

2.1.2 Der gemeinsame Stabilisator zweier Kegelschnitte über einem algebraisch abgeschlossenen Körper

Um den gemeinsamen Stabilisator zweier Kegelschnitte über einem beliebigen Körper zu finden, ist es sinnvoll, die Situation zuerst im algebraischen Abschluß zu betrachten, denn dann schneiden sich zwei Kegelschnitte immer in mindestens einem und höchstens vier Punkten. Der gemeinsame Stabilisator muß dann auf diesen Schnittpunkten operieren.

In die Untersuchung von Kegelschnitten über einem algebraisch nicht abgeschlossenen Körper \mathbb{K} mit algebraischem Abschluß \mathbb{L} gehen die Ergebnisse des folgenden Satzes ein. Deshalb müssen Objekte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ in den Notationen unterschieden werden. Insbesondere die Buekenhoutgruppen bezeichnen wir deshalb, wenn ein algebraisch abgeschlossener Körper zugrunde liegt, nicht mit $G_g(K)$, sondern mit $\Gamma_g(K)$.

SATZ 20 *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$. Es seien K_0 und K_1 zwei verschiedene, nichtentartete Kegelschnitte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ und $\Gamma_0, \Gamma_1 < PGL_3(\mathbb{L})$ deren Stabilisatoren sowie $\Gamma = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ ihr gemeinsamer Stabilisator.*

Dann gilt:

(I) *Ist Γ endlich, so ist Γ isomorph zu einer der folgenden Gruppen:*

$$id, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, A_4$$

Für $\text{char}\mathbb{L} \neq 3$ wird jede der angegebenen Gruppen durch geeignete Kegelschnitte K_0, K_1 realisiert. Für $\text{char}\mathbb{L} = 3$ entfällt die A_4 .

(Ia) *Ist $\Gamma = id$, so haben K_0 und K_1 zwei Punkte gemeinsam. In einem der Punkte stimmen die Tangenten der beiden Kegelschnitte überein, im anderen nicht.*

(Ib) *Ist $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$, so haben K_0 und K_1 drei Punkte gemeinsam. In einem der Punkte stimmen die Tangenten der beiden Kegelschnitte überein, in den anderen beiden nicht. Die zwei Kegelschnitte haben genau ein Pol-Polaren-Paar gemeinsam.*

(Ic) *Ist $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ oder $\Gamma \cong A_4$, so haben K_0 und K_1 vier Punkte und (genau) ein Poldreieck gemeinsam.*

(II) *Ist $|\Gamma| = \infty$, so ist Γ eine Buekenhoutgruppe.*

(IIa) *Ist Γ eine Buekenhoutgruppe vom Tangententyp, so haben K_0 und K_1 genau einen Punkt gemeinsam, in dem auch ihre Tangenten übereinstimmen. Die Zentren der Involutionen, die die Buekenhoutgruppe erzeugen, liegen auf dieser Tangente.*

(IIb) *Ist Γ eine Buekenhoutgruppe vom Sekantentyp, so haben K_0 und K_1 genau zwei Punkte gemeinsam, in denen auch ihre Tangenten übereinstimmen. Die Zentren der Involutionen, die die Buekenhoutgruppe erzeugen, liegen auf der Verbindungsgeraden der beiden gemeinsamen Punkte.*

Beweis:

(1) Da die $PGL_3(\mathbb{L})$ transitiv auf der Menge aller Kegelschnitte operiert, kann man oBdA. annehmen:

$$K_0 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : wy = x^2\} = \{(0 : 0 : 1)\} \cup \{(1 : x : x^2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : x \in \mathbb{L}\}$$

Es sei π_0 bzw. π_1 die Polarität, deren Menge von absoluten Punkten gleich dem Kegelschnitt K_0 bzw. K_1 ist. Dann ist $\alpha := \pi_1\pi_0$ eine Kollineation in $PGL_3(\mathbb{L})$. Über \mathbb{L} hat jeder Repräsentant $A \in GL_3(\mathbb{L})$ von α einen Eigenvektor, da das charakteristische Polynom von A mindestens eine Nullstelle besitzt, also hat α mindestens einen Fixpunkt. Für jeden Punkt $P \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ gilt:

$$P^\alpha = P \iff P^{\pi_0} = P^{\pi_1}$$

Deshalb gibt es mindestens einen Punkt der Ebene, auf dem π_0 und π_1 gleich wirken.

(2) Wir betrachten den Fall, daß es einen Fixpunkt P von α gibt, der auf K_0 liegt.

Dann ist P^{π_0} die Tangente von P an K_0 . Es muß auch $P \in K_1$ gelten wegen $P \in P^{\pi_1} = P^{\pi_0}$. Also berühren sich K_0 und K_1 in P und haben dort dieselbe Tangente, es folgt $|K_0 \cap K_1| < 4$.

Jetzt sind drei Fälle zu unterscheiden, nämlich $|K_0 \cap K_1| = 1, 2$ oder 3 .

(2a) Wir zeigen: Falls $|K_0 \cap K_1| = 1$ ist, ist Γ eine Buekenhoutgruppe vom Tangententyp.

Es sei oBdA. der Berührungspunkt $P = (0 : 0 : 1)$ und K_1 die Nullstellenmenge der folgenden Gleichung:

$$aw^2 + 2bwx + 2cwy + dx^2 + 2exy + fy^2 = 0 \quad (*)$$

Wegen $(0 : 0 : 1) \in K_1$ ist dann $f = 0$. Da P der einzige Schnittpunkt von K_0 und K_1 ist, folgt:

$$\{(1 : x : x^2) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : a + 2bx + (2c + d)x^2 + 2ex^3 = 0\} = \emptyset$$

Dies impliziert $a \neq 0$, $b = e = 0$, $d = -2c \neq 0$, also oBdA.

$$K_1 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : wy = x^2 + tw^2\} \text{ für ein } t \in \mathbb{L}_*.$$

Für die zu K_1 gehörige Polarität π_1 und jeden Punkt $R \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ gilt dann:

$$R^{\pi_1} = R^{\pi_0} \iff R \in [\infty] = [1 : 0 : 0]$$

Das sieht man folgendermaßen ein: Die Wirkung von π_0 bzw. π_1 auf Punkten berechnet sich über die Matrix Q_0 bzw. Q_1 mit

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} -2t & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $R = (w : x : y)$ ist $R^{\pi_0} = [y : -2x : w]$ und $R^{\pi_1} = [y - 2tw : -2x : w]$. Dann ist $R^{\pi_0} = R^{\pi_1}$ genau dann, wenn $w = 0$ ist. Für alle Punkte R auf $[\infty] \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ ist also $R^{\pi_0} = R^{\pi_1}$, d.h. die Polaren dieser Punkte bzgl. π_0 und π_1 sind gleich. Dann enthält Γ alle Involutionen aus Γ_0 mit Zentrum auf $[\infty]$. Also enthält Γ die Buekenhoutgruppe $\Gamma_g := \Gamma_g(K_0)$ mit $g = [\infty]$.

Es gilt: $\Gamma = \Gamma_g$

Angenommen, es existiert ein $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_g$. Es ist klar, daß $P^\gamma = P$ ist und $g^\gamma = g$. Die Kollineation γ hat auf K_0 entweder einen oder zwei Fixpunkte (vgl. Tabelle S.76).

Hat γ nur einen Fixpunkt auf K_0 , so ist γ keine Involution, denn die K_0 -Polare des Zentrums einer Involution schneidet K_0 in zwei verschiedenen Punkten. Außerdem hat γ außer P keinen weiteren Fixpunkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ und g ist die einzige Fixgerade von γ . Aufgrund von Satz 17 ist dann γ das Produkt zweier Involutionen $I, J \in \Gamma_0$, so daß gilt:

Die Verbindungsgerade der Zentren von I und J ist gleich g ,
der Schnittpunkt der Achsen von I und J ist gleich P .

Dann ist aber $\gamma \in \Gamma_g$, im Widerspruch zur Annahme.

Hat γ zwei Fixpunkte auf K_0 , etwa S und P , so wird die Gerade $l := S \vee P$ fixiert. Da l nicht Tangente an K_1 ist, existiert ein Punkt $Q \in l \cap K_1$ mit $|\{S, P, Q\}| = 3$. Das heißt, die Gerade l bleibt unter γ punktweise fest, also ist γ eine Involution mit Achse l . Dann ist das Zentrum von γ gleich l^{π_0} mit $l^{\pi_0} \in g$ wegen $P \in l \Leftrightarrow l^{\pi_0} \in P^{\pi_0} = g$. Also ist $\gamma \in \Gamma_g$, im Widerspruch zur Annahme.

(2b) Wir zeigen: Falls $|K_0 \cap K_1| = 2$ ist, ist Γ entweder trivial oder eine Buekenhoutgruppe vom Sekantentyp.

Man kann oBdA. annehmen: $K_0 \cap K_1 = \{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)\}$. Die Tangenten in $(0 : 0 : 1)$ an K_0 und K_1 fallen zusammen. Die Tangente T_1 an K_1 im Punkt $(1 : 0 : 0)$ kann gleich der Tangente T_0 an K_0 in $(1 : 0 : 0)$ sein oder verschieden von T_0 .

Falls $T_1 = T_0$ ist, berechnet sich die Gleichung von K_1 analog wie in (2a) über den Ansatz (*) unter Einbeziehung von $(1 : 0 : 0)^{\pi_0} = (1 : 0 : 0)^{\pi_1}$. Man erhält

$$K_1 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : wy = tx^2\} \text{ für ein } t \in \mathbb{L}_* \setminus \{1\}.$$

Die Wirkung der Polarität π_1 auf den Punkten von $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ ist gegeben durch die Matrix Q_1 mit

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $R = (w : x : y)$ ist $R^{\pi_0} = [y : -2x : w]$ und $R^{\pi_1} = [y : -2tx : w]$. Dann ist $R^{\pi_0} = R^{\pi_1}$ genau dann, wenn $R = (0 : 1 : 0)$ ist oder $R \in [0 : 1 : 0]$. Die Polaren dieser Punkte bzgl. π_0 und π_1 sind also gleich und deshalb enthält Γ alle Involutionen aus Γ_0 mit Zentrum auf $[0 : 1 : 0]$. Darum enthält Γ die Buekenhoutgruppe $\Gamma_g := \Gamma_g(K_0)$ mit $g = [0 : 1 : 0]$.

Es gilt: $\Gamma = \Gamma_g$.

Angenommen, es existiert ein $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_g$. Es ist klar, daß $(0 : 1 : 0)^\gamma = (0 : 1 : 0)$ ist und $g^\gamma = g$. Außerdem hat γ einen oder zwei Fixpunkte auf K_0 (vgl. Tabelle S.76).

Falls γ nur einen Fixpunkt $F \in K_0$ hat, liegt dieser dann nicht auf g . Die Gerade $h := F \vee (0 : 1 : 0)$ schneidet dann K_0 noch einmal in einem Punkt, der unter γ festbleiben müßte, denn die Tangenten an K_0 durch $(0 : 1 : 0)$ berühren K_0 in den Punkten $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$, diese liegen aber auf g . Widerspruch.

Falls γ zwei Fixpunkte hat, etwa Q und R , so bleibt auch der Pol Z der Verbindungsgeraden $h := Q \vee R$ fest. Ist h von g verschieden, so gibt es mindestens einen weiteren Fixpunkt von γ auf h , nämlich einen der Schnittpunkte von h mit K_1 . Dann ist h punktweise fest. Da es in Γ_0 abgesehen von involutorischen Homologien keine Perspektivitäten gibt (vgl. die Bemerkungen nach der Tabelle auf Seite 76), ist γ eine Involution mit Achse h und Zentrum $Z \neq (0 : 1 : 0)$. Es muß also $(0 : 1 : 0)$ auf der Achse h von γ liegen und Z auf g , sonst würde γ nicht die Punkte $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ vertauschen. Dann ist wieder $\gamma \in \Gamma_g$, im Widerspruch zur Annahme.

Falls γ die Fixpunkte $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ hat, wird γ induziert von einer Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}, \quad d \neq 0.$$

Diese Matrizen induzieren Kollineationen in Γ_g , wie man leicht nachrechnet (vgl. Hilfssatz 19). Also ist die Annahme $\Gamma \neq \Gamma_g$ zum Widerspruch geführt.

Falls $T_1 \neq T_0$ ist, werden von jedem Element $\gamma \in \Gamma$ drei Punkte fixiert, nämlich $(0 : 0 : 1)$ und $(1 : 0 : 0)$ sowie der Punkt $(0 : 1 : 0)$ als Pol der Verbindungsgeraden der ersten beiden Punkte. Es bleibt aber auch der Punkt $Q := (T_1 \cap K_0) \setminus (1 : 0 : 0)$ fest. Diese Punkte bilden ein nichtentartetes Viereck, also ist $\Gamma = id$. Dieser Fall tritt z.B. ein, wenn $K_1 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : wy = x^2 + wx\}$ ist.

(2c) Wir zeigen: Falls $|K_0 \cap K_1| = 3$ ist, ist $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$.

Es seien P, Q, R die drei Schnittpunkte und $P^{\pi_0} = P^{\pi_1}$, d.h. die Tangenten von K_0 und K_1 in P stimmen überein. Da die Tangenten von K_0 und K_1 an Q bzw. R dann verschieden sein müssen, gilt für jedes nichttriviale $\gamma \in \Gamma$:

$$P^\gamma = P, Q^\gamma = R, R^\gamma = Q$$

Da Γ_0 scharf dreifach transitiv auf den Punkten von K_0 operiert, ist also $|\Gamma| \leq 2$. Wenn oBdA. $P = (0 : 0 : 1)$, $Q = (1 : 1 : 1)$, $R = (1 : -1 : 1)$ gilt, erhält man analog wie in (2a) mit (*) und der Bedingung $(0 : 0 : 1)^{\pi_0} = (0 : 0 : 1)^{\pi_1}$:

$$K_1 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : -w^2 + 2cwy + (1 - 2c)x^2 = 0\} \text{ für ein } c \in \mathbb{L}_* \setminus \{\frac{1}{2}\}$$

Für jedes $c \in \mathbb{L}_* \setminus \{\frac{1}{2}\}$ enthält Γ die Involution $I \in \Gamma_0$ mit Zentrum $(0 : 1 : 0)$, denn die Wirkung der zu K_1 gehörigen Polarität auf Punkten ist gegeben durch die Matrix Q_1 mit

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & c \\ 0 & 1 - 2c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $(0 : 1 : 0)^{\pi_1} = [0 : 1 : 0] = (0 : 1 : 0)^{\pi_0}$, also $I \in \Gamma_1$.

(3) Wir betrachten den Fall, daß kein Fixpunkt von α auf K_0 liegt.

Dann kann auch kein Fixpunkt von α auf K_1 liegen. Sei Z ein solcher Fixpunkt und $g = Z^{\pi_0} = Z^{\pi_1}$. Dann ist die Involution $I \in \Gamma_0$ mit Zentrum Z in Γ enthalten. Außerdem ist $|K_0 \cap K_1| = 4$, ansonsten gäbe es nämlich ein $Q \in K_0 \cap K_1$, so daß die Tangenten in Q bzgl. K_0 und K_1 zusammenfallen würden. Dann wäre $Q^\alpha = Q^{\pi_0 \pi_1} = Q$ ein Fixpunkt von α auf K_0 im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Gruppe Γ muß dann treu auf diesen Schnittpunkten operieren (der Stabilisator von vier Punkten in allgemeiner Lage innerhalb der $PGL_3(\mathbb{L})$ ist trivial), also ist Γ isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe Σ_4 .

(3a) Wir zeigen: Es existiert eine Gruppe $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ mit $V \leq \Gamma$.

Es sei $K_0 \cap K_1 = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$. Wegen $I \in \Gamma$ sei oBdA. $P_0^I = P_1$, $P_2^I = P_3$. Es sei $Y = (P_0 \vee P_2) \cap (P_1 \vee P_3)$. Es ist klar, daß Y weder auf K_0 noch auf K_1 liegt. Es sei $J \in \Gamma_0$ die Involution mit Zentrum Y . Diese Involution vertauscht P_0 mit P_2 und P_1 mit P_3 und liegt deshalb auch in Γ_1 . Dann vertauscht die Kollineation IJ die Punkte P_0 und P_3 sowie P_1 und P_2 . Die Kollineation JI wirkt genauso, also kommutieren I und J , d.h. $IJ = JI$ ist eine Involution mit Achse $Z \vee Y$ und Zentrum $X := (Z \vee Y)^{\pi_0}$. Das Dreieck Δ mit Ecken X, Y, Z ist ein gemeinsames Poldreieck von K_0 und K_1 .

Jede Wahl von vier paarweise verschiedenen Punkten aus K_0 definiert eindeutig ein Poldreieck (von K_0) und jeder Kegelschnitt, der mit K_0 genau diese vier Punkte gemeinsam hat, hat mit K_0

auch dieses Poldreieck gemeinsam.

(3b) Wir zeigen: Γ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ oder zu A_4 .

Die Involutionen I, J und IJ aus Γ entsprechen in der Σ_4 den Doppeltranspositionen, etwa $I = (01)(23)$, $J = (02)(13)$, $IJ = (03)(12)$, wenn man $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ mit P_i identifiziert. Einfachtranspositionen auf $\Omega := \{P_0, \dots, P_3\}$ können in Γ nicht enthalten sein, denn angenommen, $\gamma \in \Gamma$ induziert eine Einfachtransposition, so betrachte man die zwei Fixpunkte $P_i \neq P_j$ von γ aus Ω sowie die zugehörigen Tangenten. Es sei $T_1(P_i)$ die K_1 -Tangente an P_i , $T_0(P_i)$ die K_0 -Tangente an P_i und $T_1(P_j)$ bzw. $T_0(P_j)$ die entsprechende Tangente an P_j . Setze $Q := T_1(P_i) \cap T_1(P_j)$ und $R := T_0(P_i) \cap T_0(P_j)$. Die Punkte P_i, P_j, Q und R bilden ein nichtentartetes Viereck in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ und sind allesamt Fixpunkte von γ , also ist γ keine Transposition, sondern die Identität.

Elemente der Ordnung 4 auf Ω können in Γ ebenfalls nicht enthalten sein, denn angenommen, $\gamma \in \Gamma$ induziert auf Ω den 4-Zykel $(1ijk)$, so betrachte man die Doppeltransposition $(1i)(jk)$ aus Γ . Es ist $(1i)(jk)(1ijk) = (ik) \in \Gamma$, ein Widerspruch, da eben gezeigt wurde, daß in Γ keine Einfachtransposition auf Ω existiert. Also können die Elemente aus Γ nur gerade Permutationen auf Ω induzieren.

(3c) Wir zeigen: Für $\text{char}\mathbb{L} = 3$ ist Γ isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Wirft man einen Blick auf die der Tabelle auf Seite 76 folgenden Bemerkungen, so sieht man, daß Elemente der Ordnung 3 aus Γ_0 in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ genau einen Fixpunkt F haben und daß F auf K_0 liegt. Wenn so ein 3-Zykel auf Ω wirkt, ist $F \in \Omega$. Dann müssen die Tangenten $T_1(F)$ und $T_0(F)$ in F bzgl. K_1 und K_0 unter so einem 3-Zykel invariant sein. Wegen $T_1(F) \neq T_0(F)$ schneidet $T_1(F)$ den Kegelschnitt K_0 in einem Punkt $Q \neq F$. Dann wäre Q ein zweiter Fixpunkt dieses 3-Zykels, Widerspruch.

(3d) Wir zeigen für $\text{char}\mathbb{L} \neq 3$:

- (A) Ist das Doppelverhältnis¹ D der vier Schnittpunkte von K_0 und K_1 nicht Nullstelle des Polynoms $x^2 - x + 1$, so ist $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (B) Ist das Doppelverhältnis von vier Punkten auf K_0 eine Nullstelle des Polynoms $x^2 - x + 1$, so gibt es unter den Kegelschnitten, die mit K_0 diese vier Punkte gemeinsam haben, genau einen Kegelschnitt K_1 mit $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cong A_4$.

Es seien wieder P_0, \dots, P_3 die vier Schnittpunkte. Hat Γ ein Element γ , das keine Involution ist, so ist dies ein 3-Zykel. Es sei $D = DV(P_0, P_1; P_2, P_3)$. Es muß dann auch

$$D = DV(P_0^\gamma, P_1^\gamma; P_2^\gamma, P_3^\gamma) \in \left\{ \frac{1}{1-D}, \frac{D-1}{D} \right\}$$

sein (vgl. [2], S.40), also $D^2 - D + 1 = 0$. Ist $D^2 - D + 1 \neq 0$, so gibt es in Γ keinen 3-Zykel, also ist $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Es sei nun oBdA. $P_1 = (1 : 1 : 1)$, $P_2 = (1 : \xi : \xi^2)$, $P_3 = (1 : \xi^2 : \xi)$ für eine primitive dritte Einheitswurzel ξ aus \mathbb{L} , außerdem $P_0 = (1 : r : r^2)$ für ein $r \in \mathbb{L} \setminus \{1, \xi, \xi^2\}$ oder $P_0 = (0 : 0 : 1)$. Man kann leicht nachrechnen, daß $D = DV(P_0, P_1; P_2, P_3)$ genau dann Nullstelle von $x^2 - x - 1$ ist, wenn $P_0 \in \{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)\}$ ist. Wenn Γ einen 3-Zykel γ besitzt, kann man oBdA.

¹Gemeint ist das Doppelverhältnis der Schnittpunkte am Kegelschnitt K_0 , vgl. Seite 75.

annehmen, daß γ den Punkt P_0 festläßt und P_1 auf P_2 , P_2 auf P_3 sowie P_3 auf P_1 abbildet. Dann wird γ induziert von der Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter kann man oBdA. annehmen, daß $P_0 = (1 : 0 : 0)$ ist, ansonsten konjugiere man die Situation mit der Involution aus Γ_0 , die das Zentrum $(1 : 0 : -1)$ hat und nummeriere die P_1, P_2, P_3 entsprechend um. Ein Kegelschnitt hat mit K_0 genau die Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 gemeinsam, wenn er die Nullstellenmenge der folgenden Gleichung ist für ein $t \in \mathbb{L}$ mit $t^3 \neq -1$:

$$wx + twy - tx^2 - y^2 = 0$$

Die zugehörige Polarität ist dann gegeben durch die Matrix $Q(t)$ mit

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 1 & -2t & 0 \\ t & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun die Tangente $T(t)$ eines durch $Q(t)$ definierten Kegelschnitts im Punkt $P_0 = (1 : 0 : 0)$. Es ist $T(t) = [0 : 1 : t]$ und $T(t) \cap K_0 = \{P_0, (1 : -\frac{1}{t} : \frac{1}{t^2})\}$. Da der durch die Matrix A gegebene 3-Zykel γ auf K_0 genau die Fixpunkte $\{P_0, (0 : 0 : 1)\}$ hat und andererseits einen durch $Q(t)$ gegebenen Kegelschnitt festläßt, muß $(1 : -\frac{1}{t} : \frac{1}{t^2})$ auch festbleiben. Das ist genau dann der Fall, wenn $t = 0$ ist, also ist K_1 mit

$$K_1 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : wx = y^2\}$$

der einzige von K_0 verschiedene Kegelschnitt, der unter γ festbleiben kann sowie die geforderten Schnittpunkte mit K_0 gemeinsam hat. Und tatsächlich ist $\gamma \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1$, denn mit $Q(0) := Q_1$ und A wie vorhin ist

$$A^t Q_1 A = \xi Q_1,$$

wie man leicht nachrechnet. Da das Erzeugnis aller Doppeltranspositionen und eines 3-Zykels in der Σ_4 die Gruppe A_4 ist, ist für K_1 mit der Gleichung von oben die Gruppe $\Gamma \cong A_4$. \square

Abschließend sei noch ohne Beweis bemerkt, daß für gewisse algebraisch nicht abgeschlossene unendliche Körper Kegelschnitte K_0 und K_1 existieren, deren gemeinsamer Stabilisator isomorph zu \mathbb{Z}_3 ist. Eingebettet in den algebraischen Abschluß muß in diesem Fall der zugehörige gemeinsame Stabilisator dann die A_4 sein.

2.1.3 Der gemeinsame Stabilisator mehrerer Kegelschnitte über einem unendlichen Körper

Es werden nun beliebige Körper \mathbb{K} der Charakteristik $\neq 2$ betrachtet. In Satz 22 wird gezeigt werden, daß, wenn eine beliebige Menge von Kegelschnitten in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ einen unendlichen gemeinsamen Stabilisator gestattet, diese Menge enthalten ist in einer Kegelschnittschar (vgl. Definition 9). Natürlich kann dann \mathbb{K} nicht endlich sein.

Über \mathbb{R} gibt es genau drei projektive Äquivalenzklassen solcher Scharen. Der Grund dafür ist, daß \mathbb{R} nur drei Quadratklassen besitzt. Für einen Körper \mathbb{K} mit einer unbekannt Anzahl von Quadratklassen führen wir zunächst einige Notationen ein:

DEFINITION 10 Es sei \mathbb{K} ein Körper mit $\text{char}\mathbb{K} \neq 2$ und $\mathcal{S}_0 := \{\alpha_i : i \in I\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Quadratklassen von \mathbb{K} . Dabei werde oBdA. angenommen, daß $\{0, 1\} \subseteq I$ gilt und $\alpha_0 := 0 \in \mathbb{K}$, $\alpha_1 := 1 \in \mathbb{K}$. Weiter sei $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \setminus \{0\}$ und $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \setminus \{1\}$. Ist $-1 \notin \mathbb{K}_*^2$, so sei oBdA. $-1 \in I$ und $\alpha_{-1} := -1 \in \mathbb{K}$.

Will man einen Überblick über die durch einen Kegelschnittstabilisator auf der gesamten Punktmenge von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ induzierte Partition in Bahnen gewinnen, so stellt sich heraus, daß man das mit Hilfe der Quadratklassen von \mathbb{K} tun kann.

HILFSSATZ 21 Es sei \mathbb{K} ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und K ein Kegelschnitt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit Stabilisator $G_K < PGL_3(\mathbb{K})$. Weiter sei \mathcal{S}_0 ein vollständiges Repräsentantensystem der Quadratklassen von \mathbb{K} und \mathcal{B} die Menge der Punktorbis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ unter G_K . Dann gilt:

Es existiert eine Bijektion zwischen \mathcal{S}_0 und \mathcal{B} .

Beweis:

(1) Man kann oBdA. $K = K_0 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2\}$ annehmen. Es sei π_0 die Polarität, deren absolute Punkte den Kegelschnitt K_0 bilden. Zuerst führen wir folgende Mengen ein:

$$\begin{aligned} [1 : 0 : 0]_* &:= \{P \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : P \in [1 : 0 : 0], P \neq (0 : 0 : 1)\} \\ B_0 &:= \{P \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : P \in K_0\} \\ B_1 &:= \{P = (1 : \tfrac{1}{2}(x+y) : xy) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x, y \in \mathbb{K}, x \neq y\} \cup [1 : 0 : 0]_* \\ B^0 &:= \{P = (1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x^2 - y \notin \mathbb{K}^2\} \end{aligned}$$

(2) B_1 ist gleich der Menge der äußeren Punkte von K_0 , das sind die, die auf (genau) zwei (verschiedenen) Tangenten liegen:

Allgemein haben die Punkte auf K_0 folgende Tangenten:

$$\begin{aligned} (1 : x : x^2)^{\pi_0} &= [x^2 : -2x : 1], \quad x \in \mathbb{K} \\ (0 : 0 : 1)^{\pi_0} &= [1 : 0 : 0] \end{aligned}$$

Für $y \in \mathbb{K}$ und Punkte $(0 : 1 : y)$ auf $[1 : 0 : 0]_*$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} (0 : 1 : y) &= [\tfrac{y^2}{4} : -y : 1] \cap [1 : 0 : 0] \\ &\text{ist der Schnittpunkt der Tangenten an } K_0 \text{ in } (1 : \tfrac{y}{2} : (\tfrac{y}{2})^2) \text{ und } (0 : 0 : 1). \end{aligned}$$

Für alle Punkte in $B_1 \setminus [1 : 0 : 0]_*$ hat man:

$$\begin{aligned} \text{Für } x \neq y \text{ ist der Punkt } (1 : \tfrac{1}{2}(x+y) : xy) &= [x^2 : -2x : 1] \cap [y^2 : -2y : 1] \\ &\text{der Schnittpunkt der Tangenten an } K_0 \text{ in } (1 : x : x^2) \text{ und } (1 : y : y^2). \end{aligned}$$

Kein anderer Punkt ist äußerer Punkt:

$P = (1 : x : y)$ liegt auf einer Tangente $[t^2 : -2t : 1]$ genau dann, wenn $t^2 - 2tx + y = 0$ eine Lösung $t \in \mathbb{K}$ hat, also wenn $x^2 - y$ eine Quadratzahl ist. Ist $x^2 = y$, so ist $P \in K_0$.

Für $x^2 - y = r^2 \neq 0$ für ein $r \in \mathbb{K}_*$ ist

$$P = (1 : x : y) = (1 : x : x^2 - r^2) = (1 : \tfrac{1}{2}[(x+r) + (x-r)] : (x+r)(x-r)) \in B_1$$

(3) Da die Punkte auf $[1 : 0 : 0]_*$ äußere sind, liegt kein innerer Punkt P auf der Geraden $[1 : 0 : 0]$. Also ist P innerer Punkt genau dann, wenn für $P = (1 : x : y)$ gilt:

$$x^2 - y \text{ ist keine Quadratzahl.}$$

Es sei nun explizit \mathcal{S}_0 wie in Definition 10. Definiere $B_i \subseteq B^0$ für $i \in I \setminus \{0, 1\}$ durch

$$P = (1 : x : y) \in B_i \iff x^2 - y \in \alpha_i \mathbb{K}_*^2$$

Für $i \in \{0, 1\}$ hat man dann

$$\begin{aligned} B_0 &= \{P = (1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x^2 - y \in \alpha_0 \mathbb{K}_*^2\} \cup \{(0 : 0 : 1)\} \\ B_1 &= \{P = (1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : x^2 - y \in \alpha_1 \mathbb{K}_*^2\} \cup [1 : 0 : 0]_* \end{aligned}$$

Nun ergibt sich eine Bijektion $\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{B}$ ganz kanonisch:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_0 = \{\alpha_i : i \in I\} \longrightarrow \mathcal{B} = \{B_i : i \in I\} \\ \alpha_i \longmapsto B_i \end{array} \right\}$$

(4) Die Mengen B_i , $i \in I$, sind natürlich die Punktorbis von G_{K_0} , und zwar sind sie die Bahnen folgender Punkte P_i :

$P_0 = (1 : 0 : 0)$, $B_0 = P_0^{G_{K_0}}$ wegen der Transitivität von G_{K_0} auf K_0 .

$P_1 = (0 : 1 : 0)$, $B_1 = P_1^{G_{K_0}}$, denn (vgl. Hilfssatz 19):

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2y \\ 1 & 2y & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x+y}{2} \\ xy \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & x+y & y \\ x^2 & 2xy & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow B_1 \subseteq P_1^{G_{K_0}}$$

$B_1 \supseteq P_1^{G_{K_0}}$:

$$P_1^{G_{K_0}} = \{(2ab : ad + bc : 2cd) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : a, b, c, d \in \mathbb{K}, ad - bc \neq 0\}$$

für $a = 0$ ist $bc \neq 0$ und somit

$$\begin{pmatrix} 2ab \\ ad + bc \\ 2cd \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2d}{b} \end{pmatrix} \in [1 : 0 : 0]_* \subseteq B_1$$

für $b = 0$ ist $ad \neq 0$ und somit

$$\begin{pmatrix} 2ab \\ ad + bc \\ 2cd \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2c}{a} \end{pmatrix} \in [1 : 0 : 0]_* \subseteq B_1$$

für $ab \neq 0$ ist

$$\begin{pmatrix} 2ab \\ ad + bc \\ 2cd \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\frac{d}{b} + \frac{c}{a}) \\ \frac{d}{b} \cdot \frac{c}{a} \end{pmatrix} \in B_1$$

$P_i = (1 : 0 : -\alpha_i)$, $B_i = P_i^{G_{K_0}}$, $i \in I \setminus \{0, 1\}$, denn:

$$\begin{aligned} P &= (1 : x : y) \in B_i \iff \exists r \in \mathbb{K}_* : P = (1 : x : x^2 - \alpha_i r^2); \\ \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 - \alpha_i r^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & r & 0 \\ x^2 & 2rx & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha_i \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow B_i \subseteq P_i^{G_{K_0}} \end{aligned}$$

Die Bahn des Punktes P_i unter G_{K_0} wird von allen Spaltenvektoren folgender

Form repräsentiert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ac-\alpha_i bd}{a^2-\alpha_i b^2} \\ \frac{c^2-\alpha_i d^2}{a^2-\alpha_i b^2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha_i \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{K}, ad - bc \neq 0.$$

Mit $x := \frac{ac-\alpha_i bd}{a^2-\alpha_i b^2}$ und $r := \frac{ad-bc}{a^2-\alpha_i b^2}$ ist dann

$P = (1 : x : x^2 - \alpha_i r^2)$, wie man leicht nachrechnet.

Es folgt $B_i \supseteq P_i^{G_{K_0}}$.

□

DEFINITION 11 Es seien für $i \in I$ die Punktorbis B_i und die Quadratklassenrepräsentanten α_i wie in obigem Beweis. Statt B_i schreiben wir manchmal auch B_{α_i} oder, falls wir ohne Indizes arbeiten, für $\alpha \in \mathcal{S}$ einfach B_α . Außerdem setzen wir für einen Punkt $P \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$:

$$B(P) := B_i \iff P \in B_i, i \in I$$

Die Punkte aus B_1 heißen äußere Punkte von K_0 , die Punkte aus $B^0 = \bigcup_{i \in I \setminus \{0,1\}} B_i$ heißen innere Punkte von K_0 .

Mit Hilfe der Polarität π_0 läßt sich die Bahnenpartition von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ auf die Menge \mathcal{G} der Geraden in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ übertragen: Es ist $\mathcal{G} = \bigcup_{i \in I} B_i^{\pi_0}$ mit den Bahnen $B_i^{\pi_0}$ und für $g \in \mathcal{G}$ und $i \in I$ gilt:

$$g \in B_i^{\pi_0} \iff g^{\pi_0} \in B_i$$

Als Repräsentanten der Geradenbahnen bietet es sich natürlich an, die Polaren der Repräsentanten der Punktebahnen zu wählen, also:

$$\begin{aligned} B_0^{\pi_0} &= [0 : 0 : 1]^{G_{K_0}}, & [0 : 0 : 1] &=: g_0 \\ B_1^{\pi_0} &= [0 : 1 : 0]^{G_{K_0}}, & [0 : 1 : 0] &=: g_1 \\ B_{\alpha_i}^{\pi_0} &= [-\alpha_i : 0 : 1]^{G_{K_0}}, & [-\alpha_i : 0 : 1] &=: g_{\alpha_i} \text{ für } i \in I \setminus \{0, 1\} \end{aligned}$$

Nun haben wir die Hilfsmittel beisammen, um den nächsten Satz zu beweisen:

SATZ 22 *Es sei \mathbb{K} ein unendlicher Körper mit $\text{char} \mathbb{K} \neq 2$ und K_0 ein nichtleerer, nichtentarteter Kegelschnitt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Es sei I eine Indexmenge mit $0 \in I$, $|I| \geq 2$ und $\mathcal{K} = \{K_i : i \in I\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen, nichtleeren, nichtentarteten Kegelschnitten in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Die Gruppe G_i sei der Stabilisator von K_i in der $PGL_3(\mathbb{K})$ und weiter sei $G_{\mathcal{K}} := \bigcap_{i \in I} G_i$.*

Wenn $|G_{\mathcal{K}}| = \infty$ ist, gelten folgende Aussagen:

- (I) *Es existiert eine eindeutig bestimmte Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, so daß $G_{\mathcal{K}}$ gleich der Buekenhoutgruppe $G_g(K_0)$ ist.*
- (II) *Es existiert eine eindeutig gegebene maximale Menge von Kegelschnitten \mathcal{K}_m mit $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_m$, so daß der Schnitt der Stabilisatoren aller Kegelschnitte aus \mathcal{K}_m gleich $G_{\mathcal{K}}$ ist. Die Menge \mathcal{K}_m ist – je nachdem, ob g Sekante, Tangente oder Passante an K_0 ist – eine Sekanten-, Tangenten- oder Passantenschar.*
- (III) *Es existiert eine Bijektion zwischen den Quadratklassen von \mathbb{K} und den projektiven Äquivalenzklassen der Kegelschnittscharen \mathcal{K}_m .*

Beweis:

(1) Man kann oBdA. $K_0 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2\}$ annehmen. Es sei $K_1 \neq K_0$ ein Kegelschnitt aus \mathcal{K} . Wenn $|G_{\mathcal{K}}| = \infty$ ist, ist auch $G := G_1 \cap G_0$ eine unendliche Gruppe. Wir betten nun die Situation in den algebraischen Abschluß \mathbb{L} von \mathbb{K} ein:

Es sei $F_i \in \mathbb{K}[w, x, y]$ ein irreduzibles homogenes Polynom vom Grad 2, dessen Nullstellenmenge $K_i \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist. Wir setzen $K_i^a := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : F_i(w, x, y) = 0\}$. Die Gruppe Γ_i sei der Stabilisator von K_i^a in der $PGL_3(\mathbb{L})$. Natürlich ist $G_i \leq \Gamma_i$ für jedes $i \in I$ und für jede nichtleere Teilmenge I' von I gilt:

$$\bigcap_{i \in I'} G_i \leq \bigcap_{i \in I'} \Gamma_i$$

Wenn G bzw. $G_{\mathcal{K}}$ eine unendliche Gruppe ist, kann $\Gamma := \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ bzw. $\Gamma_{\mathcal{K}} := \bigcap_{i \in I} \Gamma_i$ nicht endlich sein. Wegen Satz 20 sind also zwei Fälle zu unterscheiden:

- Es ist Γ eine Buekenhoutgruppe vom Tangententyp und $|K_0^a \cap K_1^a| = 1$.
- Es ist Γ eine Buekenhoutgruppe vom Sekantentyp und $|K_0^a \cap K_1^a| = 2$, wobei die Tangenten von K_0 und K_1 in den beiden Schnittpunkten übereinstimmen.

(2) Falls $|K_0^a \cap K_1^a| = 1$ ist, überlegt man sich leicht, daß der einzige Schnittpunkt S in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ liegen muß:

Wäre $S \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, so gäbe es ein $s \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$ mit $S = (1 : s : s^2)$. Da das Polynom F_1 Koeffizienten in \mathbb{K} hat und K_1 den Punkt $(0 : 0 : 1)$ nicht enthält, ist F_1 oBdA. gegeben durch

$$F_1(w, x, y) = aw^2 + 2bwx + 2cwy + dx^2 + 2exy + y^2.$$

Dann muß gelten $\{x \in \mathbb{L} : F_1(1, x, x^2) = 0\} = \{s\}$, das heißt $f_1(x) := F_1(1, x, x^2)$ faktorisiert über \mathbb{L} zu $(x - s)^4$ und $f_1(x)$ ist als Polynom in $\mathbb{K}[x]$ gegeben durch

$$f_1(x) = x^4 - 4sx^3 + 6s^2x^2 - 4s^3x + s^4.$$

Dann ist $s \in \mathbb{K}$ wegen $\text{char}\mathbb{K} \neq 2$.

Man kann also oBdA. annehmen, daß $K_0^a \cap K_1^a = K_0 \cap K_1 = S = (0 : 0 : 1)$ ist. Dann existiert ein $t \in \mathbb{K}_*$, so daß gilt (vgl. Beweis von Satz 20, Teil (2a)):

$$K_1 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2 + tw^2\}$$

Die zugehörige Buekenhoutgruppe $G_g := G_g(K_0) = \Gamma_g(K_0) \cap PGL_3(\mathbb{K})$ mit $g = [1 : 0 : 0]$ ist dann gleich $N \rtimes \langle I \rangle$, wobei der Normalteiler N induziert wird durch $N' \leq GL_3(\mathbb{K})$ und die (nicht eindeutige) Involution I z.B. durch die Matrix $I' \in GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$N' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ c^2 & 2c & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : c \in \mathbb{K} \right\}, \quad I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei für $t \in \mathbb{K}$ der Kegelschnitt $K(t) = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2 + tw^2\}$ sowie $G(t)$ der Stabilisator von $K(t)$ in der $PGL_3(\mathbb{K})$. Wir zeigen nun:

(A) $\bigcap_{t \in \mathbb{K}} G(t) = G_g$

(B) Ist K' ein Kegelschnitt mit $K' \neq K(t) \forall t \in \mathbb{K}$, so gilt für den Stabilisator $G_{K'}$ von K' :

$$|G_0 \cap G_1 \cap G_{K'}| < \infty$$

Es sei für ein $t \in \mathbb{K}$ der Punkt $(1 : x : y) \in K(t)$, also $y = x^2 + t$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & \sigma & 0 \\ c^2 & 2\sigma c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c + \sigma x \\ (c + \sigma x)^2 + t \end{pmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{K}, \sigma \in \{\pm 1\}$$

läßt G_g jeden Kegelschnitt $K(t)$ fest. Wegen $G_g \subseteq \bigcap_{t \in \mathbb{K}} G(t) \subseteq G_0 \cap G_1 = G_g$ ist (A) gezeigt. Betrachte nun einen beliebigen Kegelschnitt K' in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Falls $|G_0 \cap G_1 \cap G_{K'}| = \infty$ ist, wähle man einen Punkt $(1 : x : y)$ auf K' , der nicht auf $[\infty]$ liegt. Es existiert genau ein $t \in \mathbb{K}$ mit $(1 : x : y) = (1 : x : x^2 + t) \in K(t)$. Der Orbit $(1 : x : y)^{G_0 \cap G_1 \cap G_{K'}}$ kann dann nicht endlich sein und ist in $K(t)$ enthalten. Da aber infolgedessen K' und $K(t)$ unendlich viele Punkte gemeinsam haben, ist $K' = K(t)$. Damit ist $\mathcal{K}_m = \{K(t) : t \in \mathbb{K}\}$ die maximale Kegelschnittmenge, die unter G_g fest bleibt. Es handelt sich um eine Tangentenschar, sie überdeckt $\mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \setminus [\infty]$ einfach.

(3) Falls $|K_0^a \cap K_1^a| = 2$ ist, sind im Prinzip drei Fälle zu unterscheiden:

- (a) Einer der Schnittpunkte liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, der andere nicht.
- (b) Beide Schnittpunkte liegen in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.
- (c) Keiner der Schnittpunkte liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

(3a) Der Fall (a) kann nicht auftreten:

Es sei $K_0^a \cap K_1^a = \{R, S\}$, $R \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, $S \notin \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Wegen $R \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist auch die Tangente T_R in R an K_0 in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. OBdA. sei dann $R = (1 : 0 : 0)$ und $S = (1 : s : s^2)$ mit $s \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$. Analog wie in (2) ergibt sich nun, daß K_1 die Nullstellenmenge des Polynoms $F_1(w, x, y)$ ist mit $F_1(1, x, x^2) = x^2(x - s)^2 \in \mathbb{K}[x]$. Dann muß aber s ein Element aus \mathbb{K} sein, Widerspruch.

(3b) Der Fall (b) kann natürlich auftreten. OBdA. seien $R = (0 : 0 : 1)$ und $S = (1 : 0 : 0)$ die beiden Schnittpunkte von K_0 und K_1 . Dem Beweis von Satz 20, Teil (2b), entnimmt man, daß ein $a \in \mathbb{K}_* \setminus \{1\}$ existiert mit

$$K_1 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = ax^2\}.$$

Die zugehörige Buekenhoutgruppe $G_g := G_g(K_0) = \Gamma_g(K_0) \cap PGL_3(\mathbb{K})$ mit $g = [0 : 1 : 0]$ ist dann gleich $N \rtimes \langle I \rangle$, wobei der Normalteiler N induziert wird durch $N' \subseteq GL_3(\mathbb{K})$ und die (nicht eindeutige) Involution I z.B. durch die Matrix $I' \in GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$N' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : d \in \mathbb{K}_* \right\}, \quad I' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei für $t \in \mathbb{K}_*$ der Kegelschnitt $K(t) = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = tx^2\}$ sowie $G(t)$ der Stabilisator von $K(t)$ in der $PGL_3(\mathbb{K})$. Wir zeigen nun:

(A) $\bigcap_{t \in \mathbb{K}} G(t) = G_g$

(B) Ist K' ein Kegelschnitt mit $K' \neq K(t) \forall t \in \mathbb{K}_*$, so gilt für den Stabilisator $G_{K'}$ von K' :

$$|G_0 \cap G_1 \cap G_{K'}| < \infty$$

Es sei für ein $t \in \mathbb{K}_*$ und ein $x \in \mathbb{K}_*$ der Punkt $(1 : x : y) \in K(t)$, also $y = tx^2$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ tx^2 \end{pmatrix} = tx^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{tx} \\ t(\frac{c}{tx})^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ tx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ dx \\ t(dx)^2 \end{pmatrix} \quad \forall c, d \in \mathbb{K}_*$$

läßt G_g jeden Kegelschnitt $K(t)$ fest. Wegen $G_g \subseteq \bigcap_{t \in \mathbb{K}_*} G(t) \subseteq G_0 \cap G_1 = G_g$ ist (A) gezeigt. Betrachte nun einen beliebigen Kegelschnitt K' . Falls $|G_0 \cap G_1 \cap G_{K'}| = \infty$ ist, wähle man einen Punkt $(1 : x : y)$ auf K' , der nicht auf $[1 : 0 : 0] \cup [0 : 1 : 0] \cup [0 : 0 : 1]$ liegt. Es existiert genau ein $t \in \mathbb{K}_*$ mit $(1 : x : y) = (1 : x : tx^2) \in K(t)$. Der Orbit $(1 : x : y)^{G_0 \cap G_1 \cap G_{K'}}$ kann dann nicht endlich sein und ist in $K(t)$ enthalten. Wegen $|K(t) \cap K'| = \infty$ ist deshalb $K' = K(t)$.

Damit ist $\mathcal{K}_m = \{K(t) : t \in \mathbb{K}_*\}$ die maximale Kegelschnittmenge, die von G_g festgehalten wird. Es handelt sich um eine Sekantenschar, sie überdeckt $\mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \setminus ([1 : 0 : 0] \cup [0 : 1 : 0] \cup [0 : 0 : 1])$ einfach.

(3c) Wir betrachten den Fall, daß beide Schnittpunkte R und S in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L}) \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ liegen.

Da $(0 : 0 : 1)$ kein Punkt auf K_1^a ist, ist K_1 (und K_1^a) gegeben durch ein Polynom $F_1(w, x, y) \in \mathbb{K}[w, x, y]$ mit $F_1(w, x, y) = aw^2 + 2bwx + 2cwy + dx^2 + 2exy + y^2$. Für $S := (1 : s : s^2)$ und $R := (1 : r : r^2)$ mit $r, s \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$ zerfällt dann das Polynom $f_1(x) := F_1(1, x, x^2) \in \mathbb{K}[x]$ über \mathbb{L} :

$$f_1(x) = a + 2bx + (2c + d)x^2 + 2ex^3 + x^4 = (x - r)^2(x - s^2)$$

Es muß f_1 über $\mathbb{K}[x]$ reduzibel sein, denn wäre f_1 irreduzibel, so auch separabel wegen $\text{char} \mathbb{K} \nmid 4$ (vgl. [8], S.289, A.11). Dann gäbe es aber vier verschiedene Nullstellen von f_1 in \mathbb{L} und damit vier verschiedene Schnittpunkte von K_1^a und K_0^a . Da die Polynome $(x - r)^2$ und $(x - s)^2$ nicht in $\mathbb{K}[x]$ liegen, muß gelten:

$$f_1(x) = \mu^2(x), \quad \mu(x) = (x - r)(x - s) = x^2 - x(r + s) + rs \in \mathbb{K}[x]$$

Das über $\mathbb{K}[x]$ irreduzible Polynom μ ist das Minimalpolynom von r und s über \mathbb{K} , der Fall (c) tritt also genau dann auf, wenn $\mathbb{K}[x]$ irreduzible Polynome vom Grad 2 besitzt. Wegen $g := R \vee S = [rs : -(r + s) : 1]$ ist g eine Gerade in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, die bzgl. K_0 und K_1 eine Passante ist. Wenn π_0 bzw. π_1 die Polaritäten zu K_0 bzw. K_1 sind, ist der Pol $F = g^{\pi_0} = g^{\pi_1}$ von g ein Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, und zwar bzgl. beider Kegelschnitte ein innerer Punkt. Wegen Hilfssatz 11 kann man deswegen oBdA. annehmen:

$$F = (1 : 0 : -\alpha) \text{ für ein } \alpha \in \mathcal{S}$$

Dann ist $g = [-\alpha : 0 : 1] = [rs : -(r + s) : 1]$, also $s = -r$, $\alpha = -rs = r^2$, $r = \sqrt{\alpha} \notin \mathbb{K}$. Es ist dann $f_1(x) = (x - r)^2(x + r)^2 = x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2$ und $F_1(x) = \alpha^2 w^2 + 2cwy - 2(\alpha + c)x^2 + y^2$ für ein $c \in \mathbb{K}$ mit $c^2 \neq \alpha^2$.

Es sei für $\alpha \in \mathcal{S}$ und $t \in \mathbb{K} \setminus \{\pm\alpha\}$ die Matrix $Q_\alpha(t)$ gegeben durch

$$Q_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & t \\ 0 & -2(\alpha + t) & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann die Matrix Q_0 des Kegelschnitts K_0 als $Q_\alpha(\infty)$ interpretieren, wenn man die in der projektiven Geometrie üblichen Rechenregeln für \mathbb{K}_∞ verwendet, also

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & t \\ 0 & -2(\alpha + t) & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{t} & 0 & 1 \\ 0 & -2 - 2\frac{\alpha}{t} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \stackrel{(t=\infty)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_0.$$

Für $t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha\}$ sei $\pi_\alpha(t)$ die Polarität von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, deren Wirkung auf Punkte durch die Matrix $Q_\alpha(t)$ gegeben ist. Da für gewisse Kombinationen von α und t die Menge $A(\pi_\alpha(t))$ der absoluten Punkte von $\pi_\alpha(t)$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ eventuell leer ist, greifen wir auf die Notationen von Definition 7 zurück: Es sei Π die Menge aller Polaritäten von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und $\Pi^* = \{\pi \in \Pi : A(\pi) \neq \emptyset\}$. Weiter setze $M_\alpha := \{\pi_\alpha(t) \in \Pi : t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha\}\}$ sowie $M_\alpha^* = \{\pi_\alpha(t) \in M_\alpha : \pi_\alpha(t) \in \Pi^*\}$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{K} \setminus \{\pm\alpha\}$, so daß der Kegelschnitt K_1 gegeben ist durch die Polarität $\pi_1 = \pi_\alpha(c) \in M_\alpha^*$.

Da eine Kollineation aus $PGL_3(\mathbb{K})$ einen Kegelschnitt genau dann invariant läßt, wenn sie mit der zugehörigen Polarität kommutiert, fassen wir die zu K_0 und K_1 gehörige Buekenhoutgruppe $G_g := G_g(K_0) = \Gamma_g(K_0) \cap PGL_3(\mathbb{K})$ nicht als Stabilisator der Kegelschnitte K_0 und K_1 auf, sondern als Zentralisator von π_0 und π_1 . Es ist also G_g wieder ein semidirektes Produkt $N \rtimes \langle I \rangle$, wobei der Normalteiler N induziert wird von $N' \subset GL_3(\mathbb{K})$ und I z.B. durch die Matrix $I' \in GL_3(\mathbb{K})$ mit

$$N' = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ \alpha ab & a^2 + \alpha b^2 & ab \\ \alpha^2 b^2 & 2\alpha ab & a^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : a, b \in \mathbb{K} \right\}, \quad I' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei für $t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha\}$ die Gruppe $G(t)$ gleich dem Zentralisator von $\pi_\alpha(t)$ in der $PGL_3(\mathbb{K})$ und für eine beliebige Polarität $\pi \in \Pi$ die Gruppe G_π der Zentralisator von π in der $PGL_3(\mathbb{K})$. Wir zeigen nun:

- (A) $\bigcap_{t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha\}} G(t) = G_g$
- (B) Ist π eine Polarität von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, die für alle $t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha\}$ verschieden von $\pi_\alpha(t)$ ist, so gilt: $|G_0 \cap G_1 \cap G_\pi| < \infty$
- (C) Wenn K' ein Kegelschnitt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist mit dem Stabilisator $G_{K'} < PGL_3(\mathbb{K})$ und mit $|G_0 \cap G_1 \cap G_{K'}| = \infty$, so ist K' die Menge der absoluten Punkte einer Polarität aus M_α^* .

Es sei A eine Matrix aus N' . Dann gilt für alle $t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha\}$:

$$A^t Q_\alpha(t) A = (a^2 - \alpha b^2) Q_\alpha(t)$$

Für die Matrix I' gilt ebenfalls für alle $t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha\}$:

$$I'^t Q_\alpha(t) I' = \alpha^2 Q_\alpha(t).$$

Deshalb kommutiert jede Kollineation $\gamma \in G_g$ mit $\pi_\alpha(t)$ für $t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha\}$. Wegen

$$G_g \subseteq \bigcap_{t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha\}} G(t) \subseteq G_0 \cap G_1 = G_g$$

ist (A) gezeigt.

Betrachte nun eine beliebige Polarität $\pi \in \Pi$ mit $|G_g \cap G_\pi| = \infty$ und den zugehörigen Kegelschnitt K_π^a im algebraischen Abschluß. Wegen $|G_g \cap G_\pi| = \infty$ und $[G_g : N] = 2$ gilt auch $|N \cap G_\pi| = \infty$, d.h. jede Kollineation aus $N \cap G_\pi$ fixiert die Punkte R, S und F . Hätte K_π^a mit K_0^a einen Schnittpunkt verschieden von R und S , so wäre $|N \cap G_\pi| < \infty$, da die Kollineationsgruppe Γ_0 von K_0^a in der $PGL_3(\mathbb{L})$ scharf dreifach transitiv auf K_0^a operiert und N enthält sowie $K_\pi^a \cap K_0^a$ endlich ist. Also ist $K_\pi^a \cap K_0^a \subseteq \{R, S\}$. Die zwei Kegelschnitte können sich nicht nur in einem Punkt, etwa R , schneiden, denn K_π^a hat eine Gleichung mit Koeffizienten in \mathbb{K} und dann müßte $R \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ sein (vgl. (2)). Also gilt: $K_\pi^a \cap K_0^a = \{R, S\}$. Dann muß K_π^a dieselben Tangenten wie K_0^a in R und S

haben (vgl. Beweis von Satz 20, Teil (2b)), das heißt, $\pi \in M_\alpha$, wie man sich leicht klarmacht. Also ist (B) gezeigt. Die Behauptung (C) folgt dann aus (B), wenn man K' als Menge der absoluten Punkte einer Polarität beschreibt.

Für $\pi_\alpha(t) \in M_\alpha^*$ setze nun $A(\pi_\alpha(t)) =: K_\alpha(t)$. Dann ist $\mathcal{K}_m := \{K_\alpha(t) : \pi_\alpha(t) \in M_\alpha^*\}$ die maximale Kegelschnittmenge, die unter G_g festbleibt. Es handelt sich um eine Passantenschar, die $\mathcal{P}_2(\mathbb{K}) \setminus \{F, g\}$ einfach überdeckt, wie man leicht nachrechnet.

(4) Nun wenden wir uns den projektiven Äquivalenzklassen von Kegelschnittscharen in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ zu. Es sei unter Verwendung der Notationen aus Definition 10:

$$\mathcal{K}_0 := \{K_0(t) := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = x^2 + tw^2\} : t \in \mathbb{K}\}$$

$$\mathcal{K}_1 := \{K_1(t) := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : wy = tx^2\} : t \in \mathbb{K}_*\}$$

Für $\alpha_i \in \mathcal{S}$ sei $K_{\alpha_i}(t) := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : \alpha_i^2 w^2 + 2twy - 2(\alpha_i + t)x^2 + y^2 = 0\}$ und damit dann

$$\mathcal{K}_{\alpha_i} := \{K_{\alpha_i}(t) : t \in \mathbb{K}_\infty \setminus \{\pm\alpha_i\}, K_{\alpha_i}(t) \neq \emptyset\} \text{ für } \alpha_i \in \mathcal{S}.$$

Alle diese Scharen enthalten den Standardkegelschnitt K_0 . Betrachte nun eine beliebige Kegelschnittschar $\mathcal{K} = \{K_j : j \in J\}$. Sie ist durch die Wahl eines Kegelschnitts K_{j_0} aus \mathcal{K} und eine Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ eindeutig bestimmt. Da die $PGL_3(\mathbb{K})$ transitiv auf den Kegelschnitten in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ operiert, existiert ein $\gamma_1 \in PGL_3(\mathbb{K})$ mit $K_{j_0}^{\gamma_1} = K_0$. Die Gerade g^{γ_1} liegt dann in einem Orbit $B_i^{\pi_0}$ des Stabilisators G_0 von K_0 (vgl. Definition 11). Es existiert also ein $\gamma_2 \in G_0$, so daß die Kollineation $\gamma := \gamma_2 \circ \gamma_1$ die Gerade g auf einen Repräsentanten g_{α_i} der Geradenorbits von G_0 abbildet und K_{j_0} auf K_0 . Damit ist $\mathcal{K}^\gamma = \mathcal{K}_{\alpha_i}$ für ein $\alpha_i \in \mathcal{S}_0$.

Betrachte nun, falls $\mathcal{S} \neq \emptyset$ ist, die Scharen \mathcal{K}_{α_i} , die den Nichtquadratzahlen in \mathbb{K} entsprechen. Die Kegelschnitte aus \mathcal{K}_{α_i} werden nun einer Umformung unterzogen, so daß die Gleichungen der Kegelschnitte aus \mathcal{K}_{α_i} durch einfachere Gleichungen projektiv äquivalenter Kegelschnitte ersetzt werden können (zu den Notationen vgl. (3c)). Es sei $\alpha \in \mathcal{S}$ und τ die Kollineation, die durch die Matrix T mit

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induziert wird. Die Schar \mathcal{K}_α ist gekennzeichnet durch $g = [-\alpha : 0 : 1]$ und $F = (1 : 0 : -\alpha)$. Es ist $g^\tau = [1 : 0 : 0] = [\infty]$ und $F^\tau = (1 : 0 : 0)$. Wegen

$$(T^{-1})^t Q_\alpha(t) T^{-1} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{t-\alpha}{t+\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{K} \setminus \{\pm\alpha\}$$

und

$$(T^{-1})^t Q_\alpha(\infty) T^{-1} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wird die Menge der Polaritäten M_α bijektiv abgebildet auf die Menge $M_\alpha^\tau := \{\pi'_\alpha(r) \in \Pi : r \in \mathbb{K}_*\}$, wobei die Polarität $\pi'_\alpha(r)$ gegeben ist durch die Matrix

$$Q'_\alpha(r) = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathcal{K}_\alpha^\tau = \{K'_\alpha(r) = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K}) : -rw^2 - \frac{1}{\alpha}x^2 + y^2 = 0\} : r \in \mathbb{K}_*, K'_\alpha(r) \neq \emptyset\}$. Die konjugierte Buekenhoutgruppe $G_g^\tau = N^\tau \rtimes \langle I^\tau \rangle$ wird induziert von den (normierten) Matrizen aus $TN'T^{-1}$ bzw. der Matrix $TI'T^{-1}$, wobei gilt:

$$\mathbb{K}_* \cdot TN'T^{-1} = \mathbb{K}_* \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & \alpha v \\ 0 & v & u \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}) : u^2 - \alpha v^2 = 1 \right\}, \quad TI'T^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist, ist $\alpha = -1$. In der affinen reellen Ebene mit unendlich ferner Gerade $[1 : 0 : 0]$ besteht dann \mathcal{K}_α^τ aus allen konzentrischen Kreisen um $(0, 0)$, die Buekenhoutgruppe G_g^τ ist – affin interpretiert – die Gruppe $O_2(\mathbb{R})$ mit den Drehungen um den Nullpunkt als Normalteiler. \square

2.2 Nichtsinguläre Kurven vom Grad ≥ 3

Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$ und C eine irreduzible nichtsinguläre Kurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$. Es sei Γ_C der Stabilisator von C in der linearen Kollineationsgruppe $PGL_3(\mathbb{L})$ und $Aut(C)$ die Automorphismengruppe von C im Sinne der algebraischen Geometrie. Man kann die Wirkung einer Kollineation $\gamma \in \Gamma_C$ auf der projektiven Ebene vernachlässigen und die Einschränkung $\hat{\gamma} := \gamma|_C$ betrachten. Dann ist $\hat{\Gamma}_C := \{\hat{\gamma} : \gamma \in \Gamma_C\}$ eine Untergruppe von $Aut(C)$. Für $|Aut(C)| < \infty$ ist dann sicher auch $|\Gamma_C| < \infty$.

Es habe die Kurve C den Grad $n \geq 3$. Da C nichtsingulär und irreduzibel ist, gilt für den Genus g von C :

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Es ist allgemein bekannt, daß irreduzible nichtsinguläre Kurven vom Genus ≥ 2 eine endliche Automorphismengruppe haben. Also müssen wir lediglich Kurven vom Grad 3 untersuchen. Es ist dann $Aut(C)$ eine unendliche Gruppe (vgl. etwa [6], S. 321ff.). Für Γ_C gilt das allerdings nicht, wie der folgende Satz zeigt:

SATZ 23 *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char}\mathbb{L} \neq 2$ und $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ eine irreduzible nichtsinguläre algebraische Kurve vom Grad $n \geq 3$. Dann ist der Stabilisator Γ_C von C in der $PGL_3(\mathbb{L})$ eine endliche Gruppe.*

Beweis:

Aufgrund der vorherigen Bemerkungen sind nur Kurven vom Grad 3 zu untersuchen. Betrachte zuerst denn Fall $\text{char}\mathbb{L} \neq 3$. Es hat dann C neun paarweise verschiedene Wendepunkte (vgl. [15], Cor. 10.8., S.70, in Verbindung mit Kap. 19, S. 153). Unter diesen muß es vier Punkte geben, die ein nichtentartetes Viereck bilden, denn eine Kurve vom Grad 3 schneidet eine beliebige Gerade höchstens dreimal. Die Gruppe Γ_C muß dann auf diesen Wendepunkten operieren, hat also einen Normalteiler N von endlichem Index, der diese neun Punkte, darunter ein Viereck, festläßt. Dann ist aber N trivial und somit Γ_C endlich.

Betrachte nun den Fall $\text{char}\mathbb{L} = 3$. Affin hat C oBdA. die Gleichung $y^2 = x(x-1)(x-t)$ für ein $t \in \mathbb{L} \setminus \{0, 1\}$ (vgl. [6], Prop. 4.6., S. 319). Projektiv ist C dann die Nullstellenmenge des Polynoms F mit

$$F(w, x, y) = wy^2 - x^3 + (t+1)wx^2 - tw^2x.$$

Es sei

$$h(w, x, y) := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} \in \mathbb{L}[w, x, y]$$

und $H \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ die Nullstellenmenge von h . Sie ist unter dem Namen Hessekurve von C bekannt. Läßt eine Kollineation $\gamma \in PGL_3(\mathbb{L})$ die Kurve C invariant, so auch die Hessekurve von C . Für unser Polynom F ist

$$h(w, x, y) = w(t^2w^2 - t(t+1)wx + (t+1)^2x^2 + (t+1)y^2)$$

und damit H reduzibel mit einer linearen Komponente $w = 0$. Die Gerade $[\infty] = [1 : 0 : 0]$ wird demnach von jedem $\gamma \in \Gamma_C$ auf sich selbst abgebildet, Γ_C ist also eine Untergruppe des Stabilisators dieser Geraden in der $PGL_3(\mathbb{L})$. Die Kurve C muß diese Gerade mindestens einmal schneiden. Wir unterscheiden jetzt die Fälle $t = -1$ und $t \neq -1$:

Für $t = -1$ ist

$$\begin{aligned} F(w, x, y) &= wy^2 - x^3 + w^2x \\ h(w, x, y) &= w^3 \\ C \cap [1 : 0 : 0] &= (0 : 0 : 1) =: S \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt S von C mit $[1 : 0 : 0]$ muß von jedem $\gamma \in \Gamma_C$ fixiert werden, also wird $\gamma \in \Gamma_C$ induziert von einer Matrix $A \in GL_3(\mathbb{L})$ mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & 1 \end{pmatrix}, \quad ac \neq 0.$$

Es muß dann $F \equiv F \circ A^{-1}$ sein mit

$$(F \circ A^{-1})(w, x, y) = (ad^2 - b^3 + a^2b)w^3 + (2ade + a^2c)w^2x + 2adw^2y + ae^2wx^2 + awy^2 + 2aewxy - c^3x^3.$$

Ein Koeffizientenvergleich mit F ergibt zuerst $d = e = 0$ und somit dann $(1 : -1 : 1) = (a : -c^3 : a^2c) = (1 : -\frac{c^3}{a} : ac)$ sowie $b(a^2 - b^2) = 0$. Damit folgt $c = \frac{1}{a}$ und $a^4 = 1$, weiter $b \in \{0, \pm a\}$. Also ist Γ_C für $t = -1$ endlich.

Für $t \neq -1$ sei $K_t := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : t^2w^2 - t(t+1)wx + (t+1)^2x^2 + (t+1)y^2 = 0\}$ der (eventuell entartete) Kegelschnitt, der die von $[1 : 0 : 0]$ verschiedene Komponente der Hessekurve H ist. Die Punkte $P = (0 : 1 : \sqrt{2-t})$ und $Q = (0 : 1 : -\sqrt{2-t})$ sind dann zwei verschiedene Schnittpunkte von K_t mit $[\infty]$, weiter ist $S = (0 : 0 : 1)$ der Schnittpunkt von C mit $[\infty]$. Wenn $|\Gamma_C| = \infty$ ist, hat Γ_C einen Normalteiler N vom Index 2, so daß $|N| = \infty$ ist und $\forall \gamma \in N$ gilt: $P^\gamma = P$, $Q^\gamma = Q$, $S^\gamma = S$, $K_t^\gamma = K_t$. Somit besteht N einerseits aus Perspektivitäten mit Achse $[\infty]$, da jedes $\gamma \in N$ drei Punkte, also alle Punkte auf $[\infty]$ fest läßt. Andererseits ist N eine Untergruppe des Stabilisators Γ_{K_t} des Kegelschnitts K_t . Ist K_t entartet, so besteht K_t aus zwei verschiedenen² Geraden, etwa g und h , die sich in einem Punkt $R \notin [\infty]$ schneiden, d.h. Γ_C ist eine Untergruppe der Menge der Perspektivitäten mit Zentrum R und Achse $[\infty]$. Dann hat jeder Punkt außerhalb $R \cup [\infty]$ eine kollineare Bahn. Da aber auf C jeweils höchstens drei Punkte kollinear sein können, ist Γ_C endlich.

Ist K_t nichtentartet, so muß N eine Untergruppe der Buekenhoutgruppe $\Gamma_{[\infty]}(K_t)$ sein (vgl. Definition 8). Diese enthält aber nur eine Perspektivität mit Achse $[\infty]$, wie man sich leicht überlegt. Also folgt $|\Gamma_C| < \infty$. \square

2.3 Kurven mit Singularitäten

2.3.1 Klassifikation der singulären Kurven mit unendlichem Stabilisator über einem algebraisch abgeschlossenen Körper

In diesem Kapitel werden alle irreduziblen singulären algebraischen Kurven C in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ mit unendlicher Kollineationsgruppe $\Gamma_C < PGL_3(\mathbb{L})$ klassifiziert. Es hat dann C den Grad $n \geq 3$. Der Körper \mathbb{L} ist dabei algebraisch abgeschlossen und es ist $\text{char } \mathbb{L} \neq 2$. Eine vollständige Liste der möglichen Kurventypen findet sich am Kapitelende im Satz 29. Um diesen Satz zu erhalten, wird eine Reihe von Hilfssätzen benötigt. Die Beweise dieser Hilfssätze stützen sich hauptsächlich auf die Betrachtung der geometrischen Konstellation der Singularitäten und auf elementare Eigenschaften algebraischer Kurven.

²Es kann K_t keine Doppelgerade sein wegen $K_t \neq [\infty]$ und $|K_t \cap [\infty]| = 2$.

Betrachte eine irreduzible algebraische Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ über einen algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{L} mit $\text{char}\mathbb{L} \neq 2$ als Nullstellenmenge des homogenen Polynoms F vom Grad $n \geq 3$ mit

$$F(w, x, y) = \sum a_{i,j,k} w^i x^j y^k.$$

Ist etwa der Punkt $S := (1 : 0 : 0)$ eine Singularität von C , so existiert ein $s \in \{2, \dots, n-1\}$ mit

$$F(w, x, y) = w^{n-s} f_s(x, y) + w^{n-s-1} f_{s+1}(x, y) + \dots + w f_{n-1}(x, y) + f_n(x, y).$$

Dabei sind die $f_i \in \mathbb{L}[x, y]$ homogene Formen vom Grad i und f_s sowie f_n vom Nullpolynom verschieden. Die Singularität $(1 : 0 : 0)$ heißt s -facher Punkt von C . Die Form f_s zerfällt in Linearfaktoren, da \mathbb{L} algebraisch abgeschlossen ist:

$$f_s(x, y) = \prod_{i=1}^s (a_i x + b_i y)$$

Die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Geraden $T_i = [0 : a_i : b_i]$, die durch diese Linearfaktoren definiert sind, nennt man die Tangenten von S . Für jede von diesen Tangenten verschiedene Gerade g durch S gilt für deren Schnittmultiplizität m mit C in S : $m(C, S, g) = s$. Für die Tangenten T_i gilt jeweils $m(C, S, T_i) \geq s + 1$, genauer:

$$m(C, S, T_i) = s + k + 1 \Leftrightarrow a_i x + b_i y | f_{s+1}, \dots, a_i x + b_i y | f_{s+k}, a_i x + b_i y \nmid f_{s+k+1}$$

Eine irreduzible singuläre algebraische Kurve C kann nur endlich viele Singularitäten haben. Die Kollineationsgruppe $\Gamma_C < PGL_3(\mathbb{L})$ einer solchen Kurve muß dann auf dieser endlichen Menge der Singularitäten operieren. Falls nun Γ_C eine unendliche Gruppe ist und N der Normalteiler von Γ_C , der die Menge der Singularitäten punktweise festläßt, so hat, da Γ_C/N eine endliche Gruppe ist, N in Γ_C endlichen Index, also ist auch N eine unendliche Gruppe.

Da jede lineare Kollineation von $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die vier Punkte (in allgemeiner Lage) festläßt, bereits die Identität ist, kann demnach die Singularitätenkonstellation von C nicht allzu kompliziert sein. Außerdem ist klar, daß die Gruppenstruktur des Normalteilers N umso einfacher wird, je größer die Anzahl der Singularitäten ist.

Der Normalteiler N ist nicht die einzige Untergruppe von Γ_C , die später betrachtet werden wird. Gemeinsam ist diesen Untergruppen allerdings, daß sie unendliche Gruppen sind.

BEMERKUNG und DEFINITION 12 Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char}\mathbb{L} \neq 2$ und C eine irreduzible algebraische Kurve vom Grad $n \geq 3$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die mindestens eine Singularität hat. Für den Stabilisator Γ_C von C gelte:

$$|\Gamma_C| = \infty$$

Wir betrachten die Menge $\mathcal{S} := \{S_1, \dots, S_\nu\}$ ($\nu \in \mathbb{N}$) der Singularitäten von C und für jedes $i \in \{1, \dots, \nu\}$ die Menge $\mathcal{T}_i := \{T_{i1}, \dots, T_{i\rho_i}\}$ ($\rho_i \in \mathbb{N}$) der Tangenten von S_i . Die Gruppe Γ_C operiert nicht nur auf den Punkten von \mathcal{S} , sondern auch auf der Menge der Geraden aus $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} := \bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{T}_i$. Es sei nun

$$\begin{aligned} N &\leq \Gamma_C \text{ der punktweise Stabilisator von } \mathcal{S} \text{ und} \\ M &\leq N \text{ der geradenweise Stabilisator von } \mathcal{T}_{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} M &\triangleleft N, \quad M, N \triangleleft \Gamma_C \\ [\Gamma_C : N] &< \infty, \quad [N : M] < \infty, \quad [\Gamma_C : M] = [\Gamma_C : N][N : M] < \infty \\ |M| &= |N| = |\Gamma_C| = \infty \end{aligned}$$

Wir betrachten außerdem eine beliebige Untergruppe H der $PGL_3(\mathbb{L})$ und für $X \in \{M, N\}$ die Gruppe $U := H \cap X$. Falls $|H \cap \Gamma_C| = \infty$ ist, folgt:

$$|U| = \infty$$

DEFINITION 13 Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, $1 \leq k \leq n-1$, $(k, n) = 1$. Die Nullstellenmenge des Polynoms

$$F_{n,k}(w, x, y) = w^{n-k}y^k - x^n$$

bezeichnen wir mit $C_{n,k}$. Eine Kurve C in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die projektiv äquivalent ist zu einer Kurve $C_{n,k}$, heißt verallgemeinerte Parabel. Da dieser Begriff später sehr häufig auftaucht, kürzen wir ihn ab mit VP-Kurve. Man kann oBdA. $k < n-k$ annehmen, denn eine Kurve mit der Gleichung $w^{n-k}y^k - x^n = 0$ ist projektiv äquivalent zu einer Kurve mit der Gleichung $w^k y^{n-k} - x^n = 0$.

VP-Kurven sind irreduzibel und besitzen Kollineationsgruppen von unendlicher Ordnung, wie der folgende Satz zeigt:

HILFSSATZ 24 Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char}\mathbb{L} \neq 2$ und C eine irreduzible algebraische Kurve vom Grad $n \geq 3$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$. Die Menge \mathcal{S} der Singularitäten von C enthalte mindestens einen Punkt und der Stabilisator Γ_C von C sei eine unendliche Gruppe.

Dann gilt:

(I) Falls unendlich viele Elemente aus Γ_C ein (nichtentartetes) Dreieck festlassen, ist C eine VP-Kurve.

(II) Wenn C projektiv äquivalent ist zu $C_{n,k}$, so ist Γ_C konjugiert zu $\Gamma_{n,k} := \Gamma_{C_{n,k}}$. Die Gruppe $\Gamma_{n,k}$ wird induziert von folgender Untergruppe der $GL_3(\mathbb{L})$:

(a) $\text{char}\mathbb{L} = p$, $k = 1$, $n = p^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & t & 0 \\ r^{p^N} & 0 & t^{p^N} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : r \in \mathbb{L}, t \in \mathbb{L}_* \right\}$$

(b) in allen anderen Fällen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^k & 0 \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : t \in \mathbb{L}_* \right\}$$

Beweis:

(1) Es sei Δ ein nichtentartetes Dreieck, das von unendlich vielen Elementen aus Γ_C festgelassen wird, weiter Γ_Δ der Stabilisator³ von Δ in der $PGL_3(\mathbb{L})$ sowie $H \leq \Gamma_\Delta$ die Menge der Kollineationen, die die drei Ecken von Δ punktweise festlassen. Wegen $\Gamma_\Delta/H \cong \Sigma_3$ und $|\Gamma_\Delta \cap \Gamma_C| = \infty$ folgt (vgl. Bem. 12):

$$|H \cap \Gamma_C| = \infty.$$

Man kann oBdA. annehmen, daß Δ das Einheitsdreieck ist mit Ecken $\{E_1, E_2, E_3\} = \{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)\}$. Dann wird H induziert von

$$H' = \left\{ h'(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : \lambda, \mu \in \mathbb{L}_* \right\} \leq GL_3(\mathbb{L}).$$

³Die Ecken von Δ können hier von Kollineationen aus Γ_Δ nichttrivial permutiert werden.

Es sei $h(\lambda, \mu) \in H$ die von der linearen Abbildung $h'(\lambda, \mu)$ induzierte Kollineation. Wegen Bemerkung 12 ist $U := H \cap M$ von unendlicher Mächtigkeit.

Wir setzen $I := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{L}_* \times \mathbb{L}_* : h(\lambda, \mu) \in U\}$.

(2) Wir betrachten nun das Polynom $F(w, x, y) \in \mathbb{L}[w, x, y]$, dessen Nullstellenmenge C ist:

$$F(w, x, y) = \sum a_{i,j,k} w^i x^j y^k$$

Die Menge aller Tripel (i, j, k) mit $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ und $i + j + k = n$ bezeichnen wir mit I_n .

Wenn $h(\lambda, \mu) \in \Gamma_C$ ist, ist auch $h(\lambda^{-1}, \mu^{-1}) \in \Gamma_C$. Andererseits ist $C^{h(\lambda^{-1}, \mu^{-1})}$ die Nullstellenmenge des Polynoms

$$F(w, \lambda x, \mu y) = \sum a_{i,j,k} \lambda^j \mu^k w^i x^j y^k.$$

Also folgt:

$$\forall (\lambda, \mu) \in I \exists! c(\lambda, \mu) \in \mathbb{L}_* :$$

$$c(\lambda, \mu) \sum a_{i,j,k} w^i x^j y^k = \sum a_{i,j,k} \lambda^j \mu^k w^i x^j y^k$$

bzw.

$$(\mathbf{A}) \left\{ \begin{array}{l} \forall (\lambda, \mu) \in I \exists! c(\lambda, \mu) \in \mathbb{L}_* : \\ \forall (i, j, k) \in I_n : a_{i,j,k} c(\lambda, \mu) = a_{i,j,k} \lambda^j \mu^k \end{array} \right.$$

(3) Die Singularitäten von C müssen in die Ecken von Δ hineinfallen und die Tangenten der Singularitäten können nicht verschieden von den Kanten des Dreiecks Δ sein:

Würde eine Singularität der Kurve C außerhalb von Δ liegen, so wäre $|U| = 1$, denn es gibt keine nichttriviale Kollineation, die ein nichtentartetes Viereck festläßt.

Sei nun P ein Punkt aus $\Delta \setminus \{E_1, E_2, E_3\} =: \Delta_*$ und Γ_P der Stabilisator von P in der $PGL_3(\mathbb{L})$. Es muß $|U \cap \Gamma_P| \leq n$ sein, denn $U \cap \Gamma_P$ besteht aus Homologien, die dasselbe Zentrum und dieselbe Achse haben. Für jeden Punkt $Q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) \setminus \Delta$ ist dann $Q^{U \cap \Gamma_P}$ eine Menge kollinearere Punkte und es ist $|Q^{U \cap \Gamma_P}| = |U \cap \Gamma_P|$ (eine Homologie ist durch das Bild eines Punktes außerhalb der Achse und verschieden vom Zentrum eindeutig bestimmt). Da die Kurve sicher Punkte außerhalb von Δ hat, andererseits jede Gerade nur höchstens n -mal schneiden kann, folgt:

$$\forall P \in \Delta_* : |U \cap \Gamma_P| \leq n \quad (*)$$

Hätte nun C eine Singularität S auf Δ_* , so wäre $U = U \cap \Gamma_S$ endlich, ein Widerspruch. Weiter folgt, daß die Tangenten einer Singularität nicht verschieden von den Dreieckskanten sein können, sonst würde nämlich eine solche Tangente eine der Kanten außerhalb der Ecken in einem Punkt P schneiden. Es wäre dann $U \cap \Gamma_P = U$ endlich, wieder ein Widerspruch.

(4) Die Schnittpunkte von C mit Δ müssen in die Ecken von Δ hineinfallen:

Angenommen, $C \cap \Delta_* \neq \emptyset$. Das heißt, es gibt eine Dreieckskante g von Δ mit $g \cap C = \{P_1, \dots, P_r\} \subset \Delta_*$, $r \geq 1$. Es sei Y der punktweise Stabilisator der Menge $\{P_1, \dots, P_r\}$ in U . Die Gruppe Y ist ein Normalteiler in U von endlichem Index, da U auf $\{P_1, \dots, P_r\}$ operiert. Wegen $[U : Y] < \infty$ ist $|Y| = \infty$, ein Widerspruch (vgl. (*)).

(5) Nun wird gezeigt, daß die von λ und μ abhängige Konstante $c(\lambda, \mu)$ aus (A) gleich μ^{k_0} sein muß für ein $k_0 \in \{1, \dots, n-1\}$:

Man kann oBdA. annehmen, daß $E_1 = (1 : 0 : 0)$ und $E_3 = (0 : 0 : 1)$ auf C sind, denn für jede beliebige Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ ist $|C \cap g| \geq 1$. Wegen (2) und (4) muß dann die Gleichung $F(w, 0, y) = 0$ genau die zwei nichttrivialen Lösungen $w = 0 \neq y$ und $w \neq 0 = y$ haben. Deshalb existiert ein $k_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ mit

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i,0,i} w^{n-i} y^i = a_{n-k_0,0,k_0} w^{n-k_0} y^{k_0}, \quad a_{n-k_0,0,k_0} \neq 0.$$

Mit (A) ergibt sich:

$$(B) \begin{cases} \forall (\lambda, \mu) \in I : & c(\lambda, \mu) = \mu^{k_0} \\ \forall (\lambda, \mu) \in I, \forall (i, j, k) \in I_n : & a_{ijk} \mu^{k_0} = a_{i,j,k} \lambda^j \mu^k \end{cases}$$

(6) Betrachte den Fall $E_2 = (0 : 1 : 0) \notin C$:

Es ist dann $a_{0,n,0} \neq 0$ und mit (B) schließlich

$$\mu^{k_0} = \lambda^n \quad \forall (\lambda, \mu) \in I.$$

Das impliziert, daß der Punkt $(1 : \lambda : \mu) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ auf der VP-Kurve C_{n,k_0} liegt für jedes $(\lambda, \mu) \in I$. Nimmt man weiter oBdA. an, daß der Punkt $(1 : 1 : 1)$ auf C liegt, so folgt wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

daß der Punkt $(1 : \lambda : \mu)$ auch auf C liegt für alle $(\lambda, \mu) \in I$. Da $|I| = \infty$ ist und C irreduzibel vorausgesetzt war, sind C und C_{n,k_0} gleich, da C_{n,k_0} die Nullstellenmenge eines Polynoms vom Grad n ist (Satz von Bézout).

(7) Wir zeigen nun, daß der Fall $E_2 = (0 : 1 : 0) \in C$ nicht eintreten kann.

Angenommen, E_2 ist ein s -facher Punkt von C mit $s \in \{1, \dots, n-1\}$, dann folgt:

$$F(w, x, y) = \sum_{k=s}^n x^{n-k} f_k(w, y)$$

mit homogenen Formen f_k vom Grad k sowie $f_s \neq 0$. Die Form f_s zerfällt in Linearfaktoren, etwa

$$f_s(w, y) = \prod_{i=1}^s (b_i w + c_i y), \quad (b_i, c_i) \neq (0, 0).$$

Die Tangenten an E_2 sind gegeben durch $L_i = [b_i : 0 : c_i]$. Für $s \geq 2$ ist E_2 eine Singularität, also sind die Tangenten enthalten in $\{[1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1]\}$ (vgl. (3)). Für $s = 1$ hat der einfache Punkt E_2 nur eine Tangente, diese ist auch enthalten in $\{[1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1]\}$, denn wenn E_2 von jedem $h(\lambda, \mu) \in U$ festgelassen wird, wird auch die Tangente an E_2 festgelassen. Man argumentiere weiter mit (*). Es folgt:

$$\exists i_0 \in \{0, \dots, s\} : f_s(w, y) = \sum_{i=0}^s a_{i,n-s,s-i} w^i y^{s-i} = a_{i_0,n-s,s-i_0} w^{i_0} y^{s-i_0}, \quad a_{i_0,n-s,s-i_0} \neq 0$$

Mit (B) folgt:

$$\mu^{k_0} = \lambda^{n-s} \mu^{s-i_0} \quad \forall (\lambda, \mu) \in I$$

Wir nehmen nun wieder an, daß $(1 : 1 : 1) \in C$ ist und unterscheiden die Fälle $k_0 = s - i_0$ sowie $k_0 > s - i_0$ und $k_0 < s - i_0$:

Falls $k_0 = s - i_0$ ist, ist $\lambda^{n-s} = 1 \quad \forall (\lambda, \mu) \in I$. Dann gibt es nur endlich viele $\lambda \in \mathbb{L}_*$ mit $(\lambda, \mu) \in I$ für ein $\mu \in \mathbb{L}_*$. Wegen $|I| = \infty$ findet sich also ein $\lambda_0 \in \mathbb{L}_*$ mit $\lambda_0^{n-s} = 1$, zu dem unendlich viele $\mu \in \mathbb{L}_*$ existieren mit $(\lambda_0, \mu) \in I$. Betrachtet man die Menge aller Kollineationen $h(\lambda_0, \mu) \in U$ bzw. die Menge

$$H_0 := \left\{ (h(\lambda_0, \mu))^{o(\lambda_0)} = h(1, \mu^{o(\lambda_0)}) : (\lambda_0, \mu) \in I \right\} \subseteq U,$$

so muß diese Menge unendlich viele Elemente enthalten, ansonsten gäbe es nämlich ein $t \in \mathbb{L}_*$, so daß das Polynom $x^{o(\lambda_0)} - t \in \mathbb{L}[x]$ unendlich viele Nullstellen hätte. Die Kollineationen aus H_0 sind Homologien mit Zentrum $(0 : 0 : 1)$ und Achse $[0 : 0 : 1]$, ein Widerspruch (vgl. (3)).

Falls $k_0 + i_0 - s = n - s =: l > 0$ ist, erfüllt jedes Paar $(\lambda, \mu) \in I$ die Gleichung $\lambda^l = \mu^l$. Betrachtet man die Menge aller Kollineationen $h(\lambda, \mu) \in U$ bzw. die Menge

$$H_1 := \left\{ (h(\lambda, \mu))^l : (\lambda, \mu) \in I \right\} \subseteq U,$$

so muß auch diese Menge unendlich viele Elemente enthalten. Denn wäre $|H_1| < \infty$, so gäbe es ein $t \in \mathbb{L}_*$ mit $|\{(\lambda, \mu) \in I : \lambda^l = t = \mu^l\}| = \infty$, ein Widerspruch dazu, daß das Polynom $x^l - t \in \mathbb{L}[x]$ nur endlich viele Nullstellen haben kann. Damit haben wir aber unendlich viele Homologien $(h(\lambda, \mu))^l \in U$, diesmal mit Zentrum $(1 : 0 : 0)$ und Achse $[1 : 0 : 0]$, derselbe Widerspruch wie oben.

Falls $n - s \neq k_0 + i_0 - s > 0$ ist, setze $l := k_0 + i_0 - s$, $m := n - s$. Für jedes Paar $(\lambda, \mu) \in I$ ist dann der Punkt $(1 : \lambda : \mu)$ auf der Kurve C , andererseits auf einer (nicht notwendigerweise irreduziblen) Kurve \widehat{C} mit der Gleichung

$$\begin{aligned} w^{m-l} y^l &= x^m && \text{für } l < m \\ y^l &= w^{l-m} x^m && \text{für } l > m. \end{aligned}$$

Für $l < m = n - s < n$ oder $n > l > m$ ergibt sich sofort ein Widerspruch zum Satz von Bézout wegen $|I| = \infty$.

Für $n = l > m$ muß $\widehat{C} = C$ sein, aber \widehat{C} enthält nicht den Punkt $(0 : 0 : 1)$.

Für $n < l$, $l > m$ muß C eine Komponente von \widehat{C} sein, \widehat{C} müßte also auch hier den Punkt $(0 : 0 : 1)$ enthalten, Widerspruch.

Falls $k_0 + i_0 - s < 0$ ist, setze $l := -(k_0 + i_0 - s) > 0$, $m := n - s$. Für jedes Paar $(\lambda, \mu) \in I$ liegt dann der Punkt $(1 : \lambda : \mu)$ auf der Kurve C , andererseits auf einer Kurve \widehat{C} mit der Gleichung

$$w^{m+l} = x^m y^l.$$

Diese Kurve hat den Grad $n - k_0 - i_0 < n$, da $k_0 > 0$ ist. Ein Widerspruch zur Irreduzibilität von C .

(8) Die Kurve C hat also wegen (6) und (7) die Gleichung

$$w^{n-k} y^k = x^n \quad \text{für ein } k := k_0 \in \{1, \dots, n-1\}$$

und ist deswegen eine VP-Kurve $C_{n,k}$. Für $(n, k) > 1$ ist C reduzibel, also sind n und k teilerfremd. Man sieht sofort, daß für jeden Punkt $(1 : \lambda : \mu) \in C$ mit $\lambda\mu \neq 0$ die Kollineation $h(\lambda, \mu)$ die Kurve

festläßt. Da man $C_{n,k}$ parametrisieren kann, und zwar

$$C_{n,k} = \{(1 : t^k : t^n) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : t \in \mathbb{L}\} \cup \{(0 : 0 : 1)\},$$

wird U induziert von

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^k & 0 \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : t \in \mathbb{L}_* \right\}.$$

Für $k > 1$ ist die Menge der Singularitäten von $C_{n,k}$ gleich $\{(0 : 0 : 1), (1 : 0 : 0)\}$. Dabei ist $(0 : 0 : 1)$ ein $(n-k)$ -facher Punkt mit (genau einer) Tangente $[\infty]$ und $(1 : 0 : 0)$ ein k -facher Punkt mit (genau einer) Tangente $[0 : 0 : 1]$. Wegen $n - k \neq k$ ist deshalb $\Gamma_C = \Gamma_\Delta \cap \Gamma_C = H \cap \Gamma_C = U$.

Für $k = 1$ ist – bis auf den Sonderfall $n = p^N$ in Charakteristik p – der Punkt $(1 : 0 : 0)$ der einzige Wendepunkt von $C_{n,k}$ mit Tangente $[0 : 0 : 1]$. Die Kurve hat dann nur eine Singularität $(0 : 0 : 1)$ mit nur einer Tangente $[\infty]$. Deshalb ist auch hier $\Gamma_C = \Gamma_\Delta \cap \Gamma_C = H \cap \Gamma_C = U$.

Für $k = 1$, $\text{char}\mathbb{L} = p$, $n = p^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ hat die Kurve einen Knoten $P = (0 : 1 : 0)$, also einen Punkt, in dem sich alle Tangenten an C treffen. Es gibt genau eine Singularität $S = (0 : 0 : 1)$, und die hat genau eine Tangente, nämlich $[\infty]$. Die volle Gruppe Γ_C muß also S und P festlassen. Daß Γ_C genau die in (IIa) angegebene Gruppe ist, bestätigt man leicht durch Nachrechnen. \square

Für die Menge $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ der Singularitäten einer singulären irreduziblen Kurve C , die keine VP-Kurve ist und für die $|\Gamma_C| = \infty$ gilt, folgt aus dem eben bewiesenen Satz, daß in \mathcal{S} kein Dreieck enthalten sein kann. Das legt die nächste Frage nahe: Wenn C keine VP-Kurve ist, kann dann Γ_C mit dem Stabilisator zweier Punkte (in der $PGL_3(\mathbb{L})$) unendlich viele Kollineationen gemeinsam haben? Im nächsten Satz wird gezeigt, daß das nur im Falle endlicher Charakteristik möglich ist und auch da nur für einen speziellen Kurventyp, der in der folgenden Definition eingeführt wird.

DEFINITION 14 Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \neq 2$ und $C \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ die Nullstellenmenge der Gleichung

$$F(w, x, y) = w^{n-1}y + \sum_{i=1}^N w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i})$$

mit $n = p^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ sowie $(a_i, b_i) \in \mathbb{L} \times \mathbb{L}$, $(a_N : b_N) \in \{(0 : 1), (1 : 0)\}$. Eine Kurve C in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die projektiv äquivalent ist zu einer Kurve C , heißt Translationskurve.

Eine Kurve C hat genau eine Singularität⁴ S , diese wiederum hat genau eine Tangente, nämlich $[\infty]$. Der Punkt $(0 : 1 : 0)$ ist ein Knoten von C , d.h. dort treffen sich alle Tangenten von C . Man kann $[\infty]$ als unendlich ferne Gerade bzgl. einer affinen Ebene auffassen. Betrachtet man die zugehörige affine Kurve, in diesem Fall $C \setminus \{S\}$ als Nullstellenmenge der Gleichung $F(1, x, y) = 0$, so gibt es unendlich viele Translationen in dieser affinen Ebene, die $C \setminus \{S\}$ festlassen. Daher der Name.

Eine Kurve, die die Nullstellenmenge eines Polynoms F wie in Definition 14 ist, ist nicht notwendigerweise irreduzibel (etwa $a_i = 0 \forall i = 1, \dots, N$). Außerdem erhält man für gewisse Koeffizientenkonstellationen VP-Kurven: Die Kurve $C_{p^N,1}$ für $\text{char}\mathbb{L} = p$ beispielsweise ist ein Spezialfall einer solchen Translationskurve. Sie besteht im Affinen aus den Punkten $\{(t, t^{p^N}) : t \in \mathbb{L}\}$ und

⁴Für $a_N \neq 0 = b_N$ ist $S = (0 : 0 : 1)$, für $a_N = 0 \neq b_N$ ist $S = (0 : 1 : 0)$.

jede Translation τ_v mit $v = (u, u^{p^N})$ für ein $u \in \mathbb{L}$ operiert auf diesen Punkten.

Es gibt aber auf jeden Fall Kurven C , die irreduzibel und keine VP-Kurven sind: Das Polynom $F(w, x, y) = w^{p^2-1}y + w^p x^p + y^{p^2}$ ist irreduzibel, was man folgendermaßen einsieht:

Das Polynom F ist genau dann irreduzibel, wenn $f(x, y) = F(1, x, y)$ irreduzibel ist (vgl. [15], S.18, Thm. 3.18). Faßt man nun $f(x, y) \in \mathbb{L}[x, y]$ als Polynom in x über dem Körper $\mathbb{L}(y)$ auf und setzt man $a := -y - y^{p^2}$, so liegt das Polynom $x^p - a \in (\mathbb{L}(y))[x]$ vor. Da a keine p -te Potenz in $\mathbb{L}(y)$ ist, ist dieses Polynom irreduzibel über $\mathbb{L}(y)$ (vgl. [11], S.297, Thm. 9.1). Dann liegt über $\mathbb{L}[y]$ erst recht Irreduzibilität vor.

Daß diese Kurve keine VP-Kurve ist, ergibt sich aus der Tatsache, daß alle Tangenten durch $(0 : 1 : 0)$ gehen und $F((0 : 1 : 0)) = 0$ ist. Wenn bei VP-Kurven alle Tangenten durch einen Punkt gehen, liegt dieser aber nicht auf der Kurve.

HILFSSATZ 25 *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char}\mathbb{L} \neq 2$ und C eine singuläre, irreduzible Kurve vom Grad $n \geq 3$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die keine VP-Kurve ist. Der Stabilisator Γ_C von C sei eine unendliche Gruppe. Dann gilt:*

(I) *Wenn Γ_C mit dem Stabilisator zweier (verschiedener) Punkte unendlich viele Elemente gemeinsam hat, ist $\text{char}\mathbb{L} = p \neq 0$ und C ist eine Translationskurve.*

(II) *In der Darstellung von Definition 14 hat eine Translationskurve C die Kollineationsgruppe $\Gamma_C = V \rtimes Z$ mit einem Normalteiler V von endlichem Index, der induziert wird von $V' < GL_3(\mathbb{L})$,*

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : r : s) \in C \right\}.$$

Der Faktor Z ist eine endliche Gruppe, die isomorph ist zu Z' mit

$$Z' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{p^m} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : \lambda \in GF(p^j) \setminus \{0\} \right\}.$$

Die natürlichen Zahlen m und j sind durch die Koeffizienten der vorliegenden Translationskurve eindeutig bestimmt.

Beweis:

Der Beweis ist unterteilt in sechs Schritte. In (1) bis einschließlich (4) wird die Existenz eines geeigneten Normalteilers $V < \Gamma_C$ bewiesen mit $|V| = \infty$. Mit Hilfe dieses Normalteilers wird dann in (5) die Gleichung F der Kurve C berechnet. In (6) wird die volle Gruppe Γ_C bestimmt.

(1) Es seien P_1, P_2 zwei verschiedene Punkte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, so daß unendlich viele Elemente aus Γ_C die Menge $\{P_1, P_2\}$ festlassen. Ferner sei G der Stabilisator der Menge $\{P_1, P_2\}$ in der $PGL_3(\mathbb{L})$ und die Gruppe $H < G$ sei der punktweise Stabilisator von $\{P_1, P_2\}$. Wegen $G/H \cong \Sigma_2$ und $|G \cap \Gamma_C| = \infty$ folgt:

$$|H \cap \Gamma_C| = \infty$$

Man kann oBdA. annehmen: $\{P_1, P_2\} = \{E_2, E_3\} = \{(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\} \subset [\infty]$. Dann wird H induziert von

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & \lambda & 0 \\ t_2 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : t_1, t_2 \in \mathbb{L}, \lambda, \mu \in \mathbb{L}_* \right\} < GL_3(\mathbb{L}).$$

Man kann H' in ein semidirektes Produkt zerlegen:

$$\begin{aligned}
 H' &= N' \rtimes Z' \text{ mit} \\
 N' &= \left\{ n'(t_1, t_2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H' : t_1, t_2 \in \mathbb{L} \right\} \triangleleft H' \\
 Z' &= \left\{ z'(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in H' : \lambda, \mu \in \mathbb{L}_* \right\} < H'
 \end{aligned}$$

Sind $N, Z, n(t_1, t_2), z(\lambda, \mu)$ die von obigen Untergruppen bzw. linearen Abbildungen induzierten projektiven Gruppen bzw. Kollineationen, so ergibt sich für jede Kollineation $h \in H$ eine eindeutige Darstellung $h = n(t_1, t_2)z(\lambda, \mu)$.

Wegen Bemerkung 12 ist $U := H \cap M$ von unendlicher Mächtigkeit. Da C keine VP-Kurve ist, ist (vgl. Satz 24) die Menge \mathcal{S} der Singularitäten von C in $[\infty]$ enthalten.

(2) Nun wird gezeigt: In U gibt es kein Element mit unendlicher Ordnung.

Angenommen, es existiert ein $h = n(t_1, t_2)z(\lambda, \mu) \in U$ mit $o(h) = \infty$.

Falls $\lambda = \mu = 1$ ist, ist für $\text{char}\mathbb{L} = p$ die p -te Potenz von h gleich der Identität. Für $\text{char}\mathbb{L} = 0$ liegt eine Elation vor und für jeden Punkt $P \in C$ außerhalb von $[\infty]$ ist dann $P^{(h)}$ eine unendliche Menge von kollinearen Punkten, was nicht sein kann, da die Kurve C jede Gerade g in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ höchstens n -mal schneiden kann.

Falls $|\{1, \lambda, \mu\}| = 3$ ist, hat $\langle h \rangle$ drei nichtkollineare Fixpunkte, und weil C keine VP-Kurve ist, widerspricht das Satz 24.

Falls $|\{1, \lambda, \mu\}| = 2$ ist, muß man ein wenig rechnen. Klar ist, daß h keine Homologie sein kann, weil es sonst zu viele kollineare Punkte auf C gäbe. Wenn h keine Homologie ist, wird h induziert von einer der folgenden Matrizen:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & \mu \end{pmatrix}, t_1 \neq 0, \mu \neq 1 \\
 \text{(ii)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & \lambda & 0 \\ t_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t_2 \neq 0, \lambda \neq 1
 \end{aligned}$$

Wir können jedoch oBdA. annehmen, daß h gegeben ist durch folgende Matrix A_h :

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A_t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}}_{=:A_\mu}, t \in \mathbb{L}_*$$

Diese Annahme kann man machen, weil Matrizen der Form (i) innerhalb H' konjugiert sind zu solchen mit $t_2 = 0$, bei Matrizen der Form (ii) vertausche man einfach E_2 und E_3 . Es sei z die durch A_μ , τ^{-1} die durch A_t gegebene Kollineation. Da diese beiden Kollineationen kommutieren, erhalten wir im Falle endlicher Charakteristik:

$$h^p = z^p$$

Die Kollineation z^p ist eine Homologie von unendlicher Ordnung, ein Widerspruch. Also verbleibt der Fall $\text{char}\mathbb{L} = 0$.

Wenn $\text{char}\mathbb{L} = 0$ ist, ist wegen $t \neq 0$ das Erzeugnis der Elation τ isomorph zu \mathbb{Z} . Wegen $h^m = (\tau^{-1}z)^m = (\tau^{-1})^m z^m$ folgt

$$o(z) = o(\mu) = \infty,$$

ansonsten wäre $h^{o(z)} = (\tau^{-1})^{o(z)}$ eine Elation mit kollinearen Punktebahnen. Nun betrachten wir die Wirkung von $h = \tau^{-1}z = z\tau^{-1}$ auf der Kurve C . Wegen $h^m(C) = C$ bzw. $(z\tau^{-1})^m(C) = C$ ist

$$C(m) := (\tau^{-1})^m(C) = (z^{-1})^m(C) \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Jede Kurve $C(m)$ muß die Gerade $[\infty]$ mindestens einmal schneiden. Für $m = 0$ ist $C(m) = C$. Insbesondere gilt:

$$C \cap [\infty] \subseteq \{E_2, E_3\}.$$

Das sieht man folgendermaßen ein: Angenommen,

$$\Omega_0 := C \cap [\infty] \setminus \{E_2, E_3\} \neq \emptyset, \quad \Omega_0 = \{P_1, \dots, P_{r_0}\}, \quad r_0 \geq 1.$$

Es ist $\tau^m(\Omega_0) = z^m(\Omega_0) \forall m \in \mathbb{Z}$. Da $\tau|_{[\infty]}$ die Identität ist, folgt $z^m(\Omega_0) = \Omega_0 \forall m \in \mathbb{Z}$. Betrachte die Punkte $P_1 := (0 : 1 : y)$ mit $y \neq 0$ und $z^m(P_1) = (0 : 1 : \mu^m y)$ für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wegen $o(\mu) = \infty$ ist $z^m(P_1)$ höchstens für endlich viele m in Ω_0 enthalten, ein Widerspruch.

Die Kurve C habe die Gleichung $F(w, x, y) = \sum a_{i,j,k} w^i x^j y^k$. Dann folgt aus $C \cap [\infty] \subseteq \{E_2, E_3\}$:

$$(A) \begin{cases} \exists r \in \{0, \dots, n\} \text{ mit} \\ F(0, x, y) = \sum_{j=0}^n a_{0,j,n-j} x^j y^{n-j} = a_{0,r,n-r} x^r y^{n-r}, \\ a_{0,r,n-r} \neq 0, \quad a_{0,j,n-j} = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{r\} \end{cases}$$

Nun machen wir uns klar, daß der Punkt $E_1 = (1 : 0 : 0)$ nicht auf C liegen kann.

Angenommen, $(1 : 0 : 0) \in C$. Es ist $(1 : 0 : 0) = z^m((1 : 0 : 0)) \in z^m(C) = \tau^m(C)$ und deshalb auch $(1 : 0 : 0) \in \tau^m(C)$. Dies impliziert:

$$\begin{aligned} \tau^{-m}((1 : 0 : 0)) &\in C \quad \forall m \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \{ \tau^{-m}((1 : 0 : 0)) : m \in \mathbb{Z} \} &\subset C \end{aligned}$$

Demnach enthält C unendlich viele kollineare Punkte, Widerspruch.

Die Kurve C schneidet die Gerade $[0 : 0 : 1]$ genau im Punkt $(0 : 1 : 0) = E_2$:

Angenommen, $(0 : 1 : 0) \notin C$. Wegen $(1 : 0 : 0) \notin C$ folgt

$$\Omega_1 := C \cap [0 : 0 : 1] \setminus \{E_1, E_2\} \neq \emptyset, \quad \Omega_1 = \{Q_1, \dots, Q_{r_1}\}, \quad r_1 \geq 1.$$

Es ist $\tau^m(\Omega_1) = z^m(\Omega_1) \forall m \in \mathbb{Z}$. Da $z|_{[0:0:1]}$ die Identität ist, folgt $\tau^m(\Omega_1) = \Omega_1 \forall m \in \mathbb{Z}$. Betrachte die Punkte $Q_1 := (1 : x : 0)$ mit $x \neq 0$ und $\tau^m(Q_1) = (1 : tm + x : 0)$ für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Da $\{\tau^m(Q_1) : m \in \mathbb{Z}\}$ keine endliche Menge ist, kann sie nicht in Ω_1 enthalten sei, Widerspruch.

Es folgt:

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} F(w, x, 0) = \sum_{i=0}^n a_{i,n-i,0} w^i x^{n-i} = a_{n,0,0} w^n, \\ a_{n,0,0} \neq 0, \quad a_{i,n-i,0} = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \\ \text{sowie f\u00fcr } r \text{ aus (A):} \\ r < n \quad (\text{denn wegen } E_2 \in C \text{ folgt } a_{0,n,0} = 0) \end{array} \right.$$

Betrachte nun $C(m) = \tau^{-m}(C) = z^{-m}(C)$ f\u00fcr $m \in \mathbb{Z}$. Die Kurve $z^{-m}(C)$ hat die Gleichung

$$G_m(w, x, y) = \sum_{i,j,k} a_{i,j,k} \mu^k w^i x^j y^k,$$

die Kurve $\tau^{-m}(C)$ hat die Gleichung

$$\begin{aligned} H_m(w, x, y) &= \sum_{i,j,k} a_{i,j,k} w^i (tmw + x)^j y^k \\ &= \sum_{i_1, i_2, i_3} \left(\sum_{\substack{i+l=i_1 \\ j-l=i_2}} a_{i,j,i_3} \binom{j}{l} (tm)^l \right) w^{i_1} x^{i_2} y^{i_3}. \end{aligned}$$

Es sei I_n die Menge aller Tripel $(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3$ mit $i + j + k = n$. Wegen $\tau^{-m}(C) = z^{-m}(C)$ folgt, da\u00df f\u00fcr alle $m \in \mathbb{Z}$ eine Konstante $c(m) \neq 0$ existiert mit

$$\begin{aligned} G_m &= c(m) H_m \\ \Leftrightarrow \forall (i_1, i_2, i_3) \in I_n : \quad a_{i_1, i_2, i_3} \mu^{i_3} &= c(m) \sum_{\substack{i+l=i_1 \\ j-l=i_2}} a_{i,j,i_3} \binom{j}{l} (tm)^l \end{aligned}$$

Wegen (B) gilt:

$$0 \neq a_{n,0,0} = c(m) \sum_{\substack{i+l=n \\ j-l=0}} a_{i,j,k} \binom{j}{l} (tm)^l = c(m) a_{n,0,0}$$

Also mu\u00df immer $c(m) = 1$ sein. Wegen (A) folgt nun

$$a_{0,r,n-r} \mu^{n-r} = \sum_{\substack{i+l=0 \\ j-l=r}} a_{i,j,n-r} \binom{j}{l} (tm)^l = a_{0,r,n-r} \neq 0,$$

demnach mu\u00df $\mu^{n-r} = 1$ sein. Wegen (B) ist $r < n$, damit hat μ endliche Ordnung, ein Widerspruch.

(3) Nun wird gezeigt: Die Menge der Elementordnungen $\{o(h) : h \in U\}$ ist nach oben beschr\u00e4nkt.

Angenommen, die Elementordnungen von U werden beliebig gro\u00df. Da Kollineationen aus U , die von Matrizen aus H' mit $1 = \lambda = \mu$ induziert werden, Elationen sind, ist deren Ordnung durch n nach oben beschr\u00e4nkt. Kollineationen $h \in U$ mit $o(h) > n$ werden deshalb induziert von Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & \lambda & 0 \\ t_2 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad o(\lambda) < \infty, \quad o(\mu) < \infty$$

mit $|\{1, \lambda, \mu\}| \in \{2, 3\}$. Falls A nur zwei Eigenwerte besitzt, ist A konjugiert zu einer Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad t \neq 0, \mu \neq 1,$$

denn für $t = 0$ läge eine Homologie vor, deren Ordnung $< n$ ist. Für $\text{char}\mathbb{L} = 0$ ist $o(B) = \infty$, was wegen (2) nicht sein kann. Für $\text{char}\mathbb{L} = p$ induziert B^p eine Homologie, d.h. $o(B) \leq pn$. Also werden Kollineationen $h \in U$ mit großer Ordnung von Matrizen A wie oben induziert mit $|\{1, \lambda, \mu\}| = 3$. Diese haben ein Fixdreieck Δ mit Ecken E_2, E_3 und $(1 : \frac{t_1}{1-\lambda} : \frac{t_2}{1-\mu})$. Es sei nun

$$W' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & \lambda & 0 \\ t_2 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in H' : o(\lambda) < \infty, o(\mu) < \infty, |\{1, \lambda, \mu\}| = 3 \right\} \subset GL_3(\mathbb{L})$$

und W die von W' induzierte Menge von Kollineationen. Wenn nun laut unserer Annahme die Elementordnungen in U nach oben unbeschränkt sind, existiert eine Folge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} o(h_i) = \infty \text{ und } h_i \in U \cap W \forall i \in \mathbb{N}.$$

OBdA. kann man dabei annehmen, daß $n^3 < o(h_i)$ gilt und $o(h_i) < o(h_j)$ für $i < j$, $i, j \in \mathbb{N}$.

Betrachte nun für jedes Folgeglied h_i das zugehörige eindeutig bestimmte Fixdreieck Δ_i bzw. die Menge $F_\Delta := \{\Delta_i : i \in \mathbb{N}\}$ dieser Fixdreiecke. Es muß gelten:

$$|F_\Delta| = \infty$$

Denn wäre $|F_\Delta| < \infty$, so gäbe es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\Delta_i^{h_j} = \Delta_i$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$. Da aber die Folgeglieder von $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise verschieden sind, widerspricht das Satz 24 bzw. der Tatsache, daß C keine VP-Kurve ist. Wegen $|F_\Delta| = \infty$ kann man nun annehmen, daß $\Delta_i \neq \Delta_j$ ist für alle $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$ (ansonsten wähle man eine geeignete Teilfolge von $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus).

Es werde das Folgeglied h_i induziert von der Matrix

$$A_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_{1i} & \lambda_i & 0 \\ t_{2i} & 0 & \mu_i \end{pmatrix}.$$

Weiter sei Z_i die Ecke von Δ_i , die verschieden von E_2 und E_3 ist. Wir betrachten nun die Mengen $\Omega_i := \Delta_i \setminus \{[\infty], Z_i\}$ und zeigen: $\Omega_i \cap C = \emptyset \forall i \in \mathbb{N}$

Dazu setze $o(\lambda_i) = a_i d_i$, $o(\mu_i) = b_i d_i$, $d_i = \text{ggT}(o(\lambda_i), o(\mu_i))$. Dann ist $o(h_i) = o(A_i) = a_i b_i d_i > n^3$. Die Kollineation $h_i^{a_i d_i}$ ist eine Homologie der Ordnung b_i , also ist $b_i \leq n$. Die Kollineation $h_i^{b_i d_i}$ ist eine Homologie der Ordnung a_i , also ist $a_i \leq n$. Dann muß aber $d_i > n$ sein und $\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = \infty$. Betrachte nun $\gamma_i := h_i^{a_i b_i}$, induziert von der Matrix

$$A_i^{a_i b_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_{1i} & \lambda_i^{a_i b_i} & 0 \\ r_{2i} & 0 & \mu_i^{a_i b_i} \end{pmatrix}.$$

Wegen $o(\lambda_i^{a_i b_i}) = o(\mu_i^{a_i b_i}) = d_i$ existiert eine primitive d_i -te Einheitswurzel ξ_{d_i} mit $\lambda_i^{a_i b_i} = \xi_{d_i}$. Außerdem existiert ein $r_i \in \{2, \dots, d_i - 1\}$ mit $\text{ggT}(r_i, d_i) = 1$ und $\mu_i^{a_i b_i} = \xi_{d_i}^{r_i}$, denn $\mu_i^{a_i b_i}$ ist ebenfalls eine primitive d_i -te Einheitswurzel. Es kann nicht $r_i = 1$ sein, sonst wäre γ_i eine Homologie, im Widerspruch zu $d_i > n$.

Für jeden Punkt P aus Ω_i gilt nun:

$$|P^{\langle \gamma_i \rangle}| = o(\gamma_i) = d_i > n.$$

Daraus folgt dann wie behauptet:

$$\Omega_i \cap C = \emptyset \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Die Menge F_Δ wird jetzt in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt:

$$\begin{aligned} F_\Delta^0 &:= \{\Delta_i \in F_\Delta : Z_i \notin C\} \\ F_\Delta^1 &:= \{\Delta_i \in F_\Delta : Z_i \in C\} \end{aligned}$$

Wir zeigen nun: $|F_\Delta^0| < \infty$

Angenommen, $|F_\Delta^0| = \infty$. Betrachte für $\Delta_i \in F_\Delta^0$ die Geraden

$$\begin{aligned} g_i &:= Z_i \vee E_3 \\ l_i &:= Z_i \vee E_2. \end{aligned}$$

Es ist $g_i \cap C = E_3$, $l_i \cap C = E_2 \forall i \in \mathbb{N}$ mit $\Delta_i \in F_\Delta^0$. Wenn $|F_\Delta^0| = \infty$ ist, ist entweder $\{g_i : \Delta_i \in F_\Delta^0\}$ oder $\{l_i : \Delta_i \in F_\Delta^0\}$ von unendlicher Mächtigkeit, da die Dreiecke Δ_i paarweise verschieden sind. Wenn oBdA. $|\{g_i : \Delta_i \in F_\Delta^0\}| = \infty$ ist, ist wegen der Schnittmultiplizität $m(g_i, C, E_3) = n$ die Ecke E_3 ein n -facher Punkt der Kurve. Dann ist C reduzibel, Widerspruch.

Es sei nun $J \subseteq \mathbb{N}$ gegeben durch $J = \{i \in \mathbb{N} : \Delta_i \in F_\Delta^1\}$. Da $|F_\Delta| = \infty$ ist und $|F_\Delta^0| < \infty$, ist $|J| = \infty$. Für alle $j \in J$ ist wegen (1) Z_j ein einfacher Punkt der Kurve C , dessen Tangente T_j dann fest bleibt unter der Wirkung von h_j , d.h. T_j ist eine der Dreieckskanten. Teilt man nun die Indexmenge J in zwei disjunkte Teilmengen auf, und zwar

$$\begin{aligned} I &:= \{j \in J : E_2 \in T_j\} \\ I' &:= \{j \in J : E_3 \in T_j\}, \end{aligned}$$

so muß eine dieser Indexmengen unendlich viele Elemente enthalten, oBdA. also $|I| = \infty$.

Für $\text{char}\mathbb{L} = 0$ können durch E_2 nur endlich viele Tangenten gehen. Daraus folgt, daß sich die unendlich vielen paarweise verschiedenen Punkte $\{Z_i : i \in I\}$ auf endlich viele Geraden verteilen müssen. Das ist ein Widerspruch zu $\Omega_i \cap C = \emptyset$.

Es sei nun $\text{char}\mathbb{L} = p$. Wir zeigen zuerst, daß die Kurve C einen Knoten hat, der nicht auf C liegt (ein Knoten ist ein Punkt, durch den unendlich viele Tangenten von C gehen). Danach zeigen wir, daß die Kurve genau eine Singularität besitzt, und zwar einen $(n-1)$ -fachen Punkt.

Wegen $|I| = \infty$ gehen unendlich viele Tangenten durch E_2 (argumentiere wie in $\text{char}\mathbb{L} = 0$). Dann ist E_2 ein Knoten und C ist gegeben durch ein Polynom $F \in \mathbb{L}[w, x^p, y]$ mit $\partial_x F = 0$. Betrachte für $i \in I$ wieder die Geraden $g_i = Z_i \vee E_3$, $l_i = Z_i \vee E_2 = T_i$. Für die Schnittmultiplizitäten muß wegen $\Omega_i \cap C = \emptyset$ gelten:

$$\begin{aligned} m(g_i, Z_i, C) &= 1 \\ m(g_i, E_3, C) &= n-1 \end{aligned}$$

Wieder wegen $\Omega_i \cap C = \emptyset$ gilt aber auch $|\{g_i : i \in I\}| = \infty$. Deshalb ist E_3 ein $(n-1)$ -facher Punkt von C , der nur eine Tangente haben kann, und zwar $[\infty]$. Damit erhalten wir für das Polynom F :

$$F(w, x, y) = yw^{n-1} + \widehat{F}_n(w, x)$$

mit einer homogenen Form $\widehat{F}_n \in \mathbb{L}[w, x^p]$ vom Grad n . Weiter gilt $p|n$, sonst wäre C wegen $w|F$ reduzibel. Setze $n = up$ und

$$F(w, x, y) = yw^{n-1} - \sum_{d=0}^u a_d w^{(u-d)p} x^{dp}.$$

Dabei ist $a_u \neq 0$ (sonst $w|F$) und $u \geq 2$. Wäre $u = 1$, so läge eine VP-Kurve vor: Man wähle, falls $a_0 \neq 0$ ist, einen Punkt P auf $C \setminus [\infty]$ und eine Kollineation γ , die E_2 und E_3 festläßt sowie P auf $E_1 = (1 : 0 : 0)$ abbildet. Die Kurve C^γ hat dann die Gleichung $yw^{p-1} - \text{const} \cdot x^p$.

Weiter gilt für F , daß für mindestens ein $d \in \{1, \dots, u-1\}$ der Koeffizient $a_d \neq 0$ ist. Denn sonst wäre C projektiv äquivalent zu einer VP-Kurve (selbes Argument wie für $u = 1$).

Aus $a_u \neq 0$ folgt $E_2 \notin C$. Gäbe es außer E_3 noch eine Singularität von C , dann auf $[\infty]$ (vgl. (1)). Die Gruppe U hätte dann noch einen dritten Fixpunkt auf $[\infty]$ und bestünde aus lauter Perspektivitäten, Widerspruch.

Als nächstes führen wir gewisse Hilfskurven C_j für $j \in J$ ein, die schließlich eine obere Schranke für die Ordnung der Elemente $\{h_j : j \in J\}$ liefern werden. Dazu stellen wir die Punkte auf $C \setminus [\infty]$ mit Hilfe der zu F gehörigen affinen Funktion f dar. Wegen $(1 : x : y) \in C \Leftrightarrow y = \sum_{d=0}^u a_d x^{dp}$ setze

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L} \\ x \longmapsto \sum_{d=0}^u a_d x^{dp} \end{array} \right\}.$$

Dann ist $C \setminus [\infty] = \{(1 : x : f(x)) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : x \in \mathbb{L}\}$. Für $j \in J$ sei $Z_j = (1 : x_j : y_j) = (1 : x_j : f(x_j))$. Betrachte die Kollineationen τ_j , jeweils gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_j & 1 & 0 \\ y_j & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Kollineation h_j ist für $j \in J$ gegeben durch

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_{1j} & \lambda_j & 0 \\ t_{2j} & 0 & \mu_j \end{pmatrix}, \quad x_j = \frac{t_{1j}}{1 - \lambda_j}, \quad y_j = \frac{t_{2j}}{1 - \mu_j}.$$

Setze weiter $\delta_j := \tau_j^{-1} h_j \tau_j$, gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j \end{pmatrix}.$$

Da $h_j(C) = C$ ist, ist $\delta_j(\tau_j^{-1}(C)) = \tau_j^{-1}(C)$. Es sei C_j die Kurve $\tau_j^{-1}(C)$. Jede solche Kurve enthält den Punkt $E_1 = (1 : 0 : 0) = \tau_j^{-1}(Z_j)$ und ist gegeben durch ein homogenes Polynom F_j :

$$F_j(w, x, y) = yw^{n-1} - \sum_{d=1}^u b_d^{(j)} w^{(u-d)p} x^{dp}$$

mit $b_u^{(j)} \neq 0$ und $b_d^{(j)} \neq 0$ für mindestens ein $d \in \{1, \dots, u-1\}$. Denn für jedes $j \in J$ gilt: Der Punkt E_3 ist $(n-1)$ -facher Punkt von C_j , $E_2 \notin C$ ist Knoten von C_j , C_j ist projektiv äquivalent zu C . Den homogenen Polynomen F_j ordnen wir für jedes $j \in J$ die affine Funktion f_j zu:

$$f_j : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L} \\ x \longmapsto \sum_{d=0}^u b_d^{(j)} x^{dp} \end{array} \right\}.$$

Dann gilt:

$$\forall j \in J, x \in \mathbb{L} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ f_j(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j x \\ \mu_j f_j(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j x \\ f_j(\lambda_j x) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $\mu_j f_j(x) = f_j(\lambda_j x) \forall j \in J, x \in \mathbb{L}$. Rechnet man diese Bedingung aus, erhält man:

$$b_d^{(j)}(\mu_j - \lambda_j^{dp}) = 0 \quad \forall d \in \{1, \dots, u\}, \quad \forall j \in J$$

Wegen $b_u^{(j)} \neq 0$ ist also $\mu_j = \lambda_j^{up}$. Nun existiert für jedes $j \in J$ ein $d(j) \in \{1, \dots, u-1\}$ mit $b_{d(j)}^{(j)} \neq 0$, also $\mu_j - \lambda_j^{d(j)p} = \lambda_j^{up} - \lambda_j^{d(j)p} = 0$. Das ist aber äquivalent zu

$$(\lambda_j^p)^{u-d(j)} = 1 \quad \forall j \in J.$$

Dies impliziert wegen $o(\lambda_j^p) = o(\lambda_j)$, daß $o(\lambda_j) \leq u - d(j)$ ist. Also ist $o(\lambda_j) \leq u$ und wegen $\mu_j = \lambda_j^{up}$ kann auch $o(\mu_j)$ nicht beliebig groß sein. Da $\mathbb{N} \setminus J$ endlich ist (wegen $|F_\Delta^0| < \infty$), ist die Annahme $\lim_{i \in \mathbb{N}, i \rightarrow \infty} o(h_i) = \infty$ zum Widerspruch geführt.

(4) Es muß gelten: $\text{char} \mathbb{L} \neq 0$

Betrachte die Menge $Z_C = \{z(\lambda, \mu) \in Z : \exists n \in N \text{ mit } nz(\lambda, \mu) \in U\}$. Wegen (2) und (3) ist Z_C eine endliche Menge. Weil $|U| = \infty$ ist, existiert ein $z_0 \in Z_C$, so daß die Menge

$$Z_0 := \{n \in N : nz_0 \in U\}$$

unendlich viele Elemente besitzt. Betrachte nun ein $n_0 \in N$ mit $n_0 z_0 \in U$ sowie die Menge $\{n_0 z_0 (nz_0)^{-1} : n \in Z_0\} = \{n_0 n^{-1} : n \in Z_0\} \subseteq N \cap U$. Wegen $|Z_0| = \infty$ ist auch $|\{n_0 n^{-1} : n \in Z_0\}| = \infty$ und deshalb ist $|N \cap U| = \infty$. Da N aus Elationen besteht, die für $\text{char} \mathbb{L} = 0$ unendliche Ordnung haben, folgt wie behauptet $\text{char} \mathbb{L} = p$ für eine Primzahl $p > 2$.

Eine weitere Konsequenz aus $|Z_C| < \infty$ ist, daß $V := N \cap U$ ein Normalteiler in U ist von endlichem Index.

(5) Jetzt zeigen wir, daß die Kurve C die Nullstellenmenge eines Polynoms F wie in Definition 14 ist.

(5a) Um später nicht unnötig viele Indizes in den Rechnungen zu haben, schreiben wir für Elemente $n(t_1, t_2) \in N$ ab jetzt $n(r, s)$. Es sei

$$I := \{(r, s) \in \mathbb{L} \times \mathbb{L} : n(r, s) \in U\}.$$

Wegen (4) ist $|I| = \infty$. OBdA. können wir annehmen, daß der Punkt $E_1 = (1 : 0 : 0)$ ein einfacher Punkt der Kurve ist mit Tangente $[0 : 0 : 1]$. Wegen $E_1^{n(r,s)} = (1 : r : s)$ gilt dann

$$(*) \quad (1 : r : s) \in C \quad \forall (r, s) \in I.$$

Die Kurve C sei gegeben durch das irreduzible Polynom $F \in \mathbb{L}[w, x, y]$ mit $F(w, x, y) = \sum a_{i,j,k} w^i x^j y^k$. Wegen $E_1 \in C$ ist $a_{n,0,0} = 0$. Da E_1 einfach ist mit Tangente $[0 : 0 : 1]$, gilt:

$$(C) \quad a_{n-1,0,1} \neq 0, \quad a_{n-1,1,0} = 0$$

Wegen (*) gilt für alle $(r, s) \in I$:

$$(D'') \quad \exists c(r, s) \neq 0 : G_{(r,s)}(w, x, y) := F(w, rw + x, sw + y) = c(r, s)F(w, x, y)$$

Berechnet man $G_{(r,s)}$ explizit, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} G_{(r,s)}(w, x, y) &= \sum_{\substack{0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n \\ i_1 + i_2 + i_3 = n}} \left(\sum_{\substack{j \geq i_2 \\ k \geq i_3}} a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} r^{j-i_2} s^{k-i_3} \right) w^{i_1} x^{i_2} y^{i_3} \\ &=: \sum_{\substack{0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n \\ i_1 + i_2 + i_3 = n}} b_{i_1, i_2, i_3}(r, s) w^{i_1} x^{i_2} y^{i_3} \end{aligned}$$

Setzen wir $(i) = (i_1, i_2, i_3)$ und $I_n = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3 : i + j + k = n\}$, so erhalten wir demnach:

$$(D') \left\{ \begin{array}{l} \forall (i) = (i_1, i_2, i_3) \in I_n, \forall (r, s) \in I : \\ G_{(r,s)}(w, x, y) = \sum_{(i) \in I_n} b_{(i)}(r, s) w^{i_1} x^{i_2} y^{i_3} \stackrel{(D'')}{=} c(r, s) \sum_{(i) \in I_n} a_{(i)} w^{i_1} x^{i_2} y^{i_3} \\ b_{(i)}(r, s) = \sum_{\substack{j \geq i_2, k \geq i_3 \\ j+k \leq n}} a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} r^{j-i_2} s^{k-i_3} \\ b_{(i)}(r, s) = c(r, s) a_{(i)} \end{array} \right.$$

(5b) Zuerst zeigen wir, daß $c(r, s) = 1$ ist für jedes Paar $(r, s) \in I$:

Da F irreduzibel ist, existiert ein $i_2 \in \{0, \dots, n\}$ mit $a_{0, i_2, n-i_2} \neq 0$. Aus (D') folgt dann:

$$\forall (r, s) \in I : c(r, s) a_{0, i_2, n-i_2} = \sum_{\substack{j \geq i_2, k \geq n-i_2 \\ j+k \leq n}} a_{0, j, k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{n-i_2} r^{j-i_2} s^{k-n+i_2}$$

Die rechtsstehende Summe hat nur einen nichttrivialen Summanden, denn $j + k \geq i_2 + n - i_2 = n$ sowie $j + k \leq n$ liefern $j + k = n$. Die Ungleichungen $j \geq i_2$ und $k \geq n - i_2$ erzwingen somit $j = i_2$ und $k = n - i_2$. Damit haben wir

$$\forall (r, s) \in I : c(r, s) a_{0, i_2, n-i_2} = a_{0, i_2, n-i_2} \neq 0$$

und deshalb wie gewünscht $c(r, s) = 1 \forall (r, s) \in I$. Wegen (D') und $c(r, s) = 1$ gilt dann:

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \forall (i) = (i_1, i_2, i_3) \in I_n, \forall (r, s) \in I : \\ 0 = b_{(i)}(r, s) - a_{(i)} = \sum_{\substack{j \geq i_2, k \geq i_3 \\ i_2 + i_3 < j+k \leq n}} a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} r^{j-i_2} s^{k-i_3} \end{array} \right.$$

(5c) Ziel der folgenden Rechnungen ist es, die meisten der Koeffizienten $a_{i,j,k}$ zu Null zu diskutieren. Dazu führen wir Polynome $Q_{(i)}$ und $H_{(i)}$ ein. Für $(i) \in I_n$ sei das Polynom $Q_{(i)} \in \mathbb{L}[x, y]$ gegeben durch

$$Q_{(i)}(x, y) := \sum_{\substack{j \geq i_2, k \geq i_3 \\ i_2 + i_3 < j+k \leq n}} a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} x^{j-i_2} y^{k-i_3}.$$

Für $i_2 + i_3 = n$ ist $Q_{(i)}$ das Nullpolynom. Es sei $H_{(i)}(w, x, y)$ das Polynom, das durch Homogenisierung von $Q_{(i)}$ entsteht und ferner sei $C_{(i)}$ die durch $H_{(i)}$ gegebene Kurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ (für $i_2 + i_3 = n$ ist $C_{(i)} = \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$).

Wegen $(*)$ und (D) haben C und $C_{(i)}$ unendlich viele Punkte gemeinsam. Da C irreduzibel ist, muß jedes $H_{(i)}$ entweder bis auf eine von Null verschiedene Konstante mit F übereinstimmen oder

aber das Nullpolynom sein (Satz von Bézout), denn betrachten wir nun den Grad von $H_{(i)}$ für $i_2 + i_3 < n$, so ist

$$\deg H_{(i)} \leq n - (i_2 + i_3) = i_1 \leq n.$$

Für $i_1 = n$ ist $H_{(i)} = F$, wie man leicht nachrechnet. Für $i_1 < n$ muß dann $H_{(i)}$ und $Q_{(i)}$ gleich dem Nullpolynom sein. Also:

$$(E) \quad a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} = 0 \quad \forall (i,j,k,i_2,i_3) \text{ mit } 0 < i_2 + i_3 < j + k \leq n, \quad i_2 \leq j, \quad i_3 \leq k$$

(5d) Wir diskutieren jetzt einige $a_{i,j,k}$ zu Null, dabei verwenden wir Bemerkung 3 auf Seite 23.

(i) Für $j, k \neq 0$ setze $i_2 = 0, i_3 = k$. Dann ist $\binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Es folgt:

$$a_{i,j,k} = 0 \quad \forall (i,j,k) \in I_n \text{ mit } j \neq 0 \neq k$$

(ii) Für $j = 0, k \geq 2$ setze $i_2 = 0$. Ist k keine p -Potenz, so existiert ein $i_3 \in \{1, \dots, k-1\}$ mit $\binom{k}{i_3} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Es folgt:

$$a_{n-k,0,k} = 0 \quad \forall k \notin \{p^i : i \in \mathbb{N}_0\}$$

(iii) Für $k = 0, j \geq 2$ setze $i_3 = 0$. Ist j keine p -Potenz, so existiert ein $i_2 \in \{1, \dots, j-1\}$ mit $\binom{j}{i_2} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Es folgt:

$$a_{n-j,j,0} = 0 \quad \forall j \notin \{p^i : i \in \mathbb{N}_0\}$$

Zusammen mit (C) liefert das dann:

$$F(w, x, y) = a_{n-1,0,1} w^{n-1} y + \sum_{i \geq 1, p^i \leq n} w^{n-p^i} (a_{n-p^i, p^i, 0} x^{p^i} + b_{n-p^i, 0, p^i} y^{p^i})$$

Setzen wir zur Vereinfachung $a_{n-1,0,1} = 1, a_{n-p^i, p^i, 0} = a_i$ sowie $b_{n-p^i, 0, p^i} = b_i$. Dann hat F die Form

$$F(w, x, y) = w^{n-1} y + \sum_{1 \leq i, p^i \leq n} w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}).$$

(5e) Falls n keine p -Potenz ist, ist $n - p^i \neq 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $p^i \leq n$. Dann teilt w das irreduzible Polynom F , ein Widerspruch. Sei also $n = p^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Der Schnitt von C mit der Geraden $[\infty]$ ist gleich der Menge

$$\{(0 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : a_N x^{p^N} + b_N y^{p^N} = 0\} = \{(0 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : \sqrt[p^N]{a_N} x + \sqrt[p^N]{b_N} y = 0\}.$$

Diese Menge besteht aus genau einem Punkt, nämlich $(0 : -\sqrt[p^N]{b_N} : \sqrt[p^N]{a_N})$. Ist $a_N \neq 0$, so können wir oBdA. $b_N = 0$ annehmen (man führe eine Koordinatentransformation $w' = w, x' = x - \sqrt[p^N]{b_N} y, y' = \sqrt[p^N]{a_N} y$ durch). Dann sind wir endlich am Ziel angekommen:

$$F(w, x, y) = w^{n-1} y + \sum_{i=1}^{N-1} w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) + \left\{ \begin{array}{l} a_N x^{p^N} \\ \text{oder} \\ b_N y^{p^N} \end{array} \right\}, \quad n = p^N \quad \oplus$$

(6) Zum Schluß betrachten wir noch die volle Kollineationsgruppe Γ_C unserer Kurve.

Falls $a_N \neq 0 = b_N$ ist, hat die Kurve den Knoten $(0 : 1 : 0) \notin C$ und genau eine Singularität $(0 : 0 : 1)$. Demnach ist $U = \Gamma_C$ und wegen (4) ist V Normalteiler in Γ_C von endlichem Index.

Ohne Beweis geben wir noch die volle Gruppe Γ_C an:

Es ist $\Gamma_C = V \rtimes Z_C$, wobei Z_C induziert wird von

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{p^N} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : \lambda \in GF(p^j) \setminus \{0\} \right\}$$

mit einem eindeutig bestimmten $i \in \{1, \dots, N\}$, welches von den Koeffizienten a_j, b_j abhängt.

Falls $a_N = 0 \neq b_N$ ist, ist der Knoten $(0 : 1 : 0)$ gleich der einzigen Singularität von C . Diese hat die Tangente $[\infty]$, d.h. Γ_C wird induziert durch eine Untergruppe von

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & \lambda & \tau \\ s & 0 & \mu \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : r : s) \in C, \tau \in \mathbb{L} \right\}.$$

Betrachten wir nun die Kurve C in der Darstellung \bigoplus . Es sei i_0 das kleinste $i \in \{1, \dots, N-1\}$ mit $a_i \neq 0$. So ein i_0 existiert, da sonst F durch y teilbar und C also irreduzibel wäre. Man kann oBdA. annehmen, daß $b_{i_0} = 0$ ist:

Es sei α die Kollineation, die von der Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t := -\sqrt[p^{i_0}]{\frac{b_{i_0}}{a_{i_0}}}$$

repräsentiert wird. Setze $\widehat{F} := F \circ A^{-1}$, dann ist

$$\widehat{F}(w, x, y) = w^{p^N-1}y + \sum_{i=1}^N w^{p^N-p^i} (a_i x^{p^i} + b'_i y^{p^i}).$$

Dabei ist $b'_i = a_i t^{p^i} + b_i$, also $b'_{i_0} = 0$ sowie $b'_N = b_N \neq 0$.

Wenn also oBdA. für die Koeffizienten des Polynoms F angenommen wird, daß $a_{i_0} \neq 0$ und $b_{i_0} = 0$ ist, kann man nachrechnen, daß Matrizen aus X mit $\tau \neq 0$ keine Kollineationen aus Γ_C liefern können, also gilt $\Gamma_C = U$. Außerdem ist $\Gamma_C = V \rtimes Z_C$, wobei Z_C induziert wird von

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{p^m} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : \lambda \in GF(p^j) \setminus \{0\} \right\}$$

mit eindeutig bestimmtem $m \in \{1, \dots, N-1\}$ (es ist $N \geq 2$, denn sonst liegt eine reduzible Kurve vor) und $j \in \{1, \dots, N\}$. Die Zahlen m und j hängen von den Koeffizienten a_i, b_i ab. \square

Für die Menge $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ der Singularitäten einer singulären irreduziblen Kurve C , die weder eine VP-Kurve noch eine Translationskurve ist und für die $|\Gamma_C| = \infty$ gilt, folgt aus den Sätzen 24 und 25, daß $|\mathcal{S}| = 1$ ist. Im nächsten Satz wenden wir uns der Frage zu, wieviele Elemente dann die Menge $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \{T_1, \dots, T_\rho\}$ ($\rho \geq 1$) der Tangenten dieser einen Singularität haben kann.

Punkt $P \in C$ ist dann P^U eine Menge kollinearere Punkte mit $|P^U| \leq n$, denn C kann jede Gerade höchstens n -mal schneiden. Dann ist der Stabilisator von P in U von unendlicher Mächtigkeit, ein Widerspruch zu Satz 24 bzw. 25.

Weiter muß gelten: $C \cap ([0 : 1 : 0] \cup [0 : 0 : 1]) = S$

Dazu betrachte $\Omega_1 := C \cap [0 : 0 : 1] \setminus \{S\}$ und $\Omega_2 := C \cap [0 : 1 : 0] \setminus \{S\}$. Falls $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2 \neq \emptyset$ ist, gilt für den Stabilisator⁵ U_Ω von Ω in U natürlich $[U : U_\Omega] < \infty$, also $|U_\Omega| = \infty$. Das ist wieder ein Widerspruch zu den Sätzen 24 und 25.

(3) Wir zeigen nun, daß jedes Element in U endliche Ordnung hat und daß die Elementordnungen in U nach oben beschränkt sind.

Die Gruppe U kann nur im Fall $\text{char}\mathbb{L} \neq 0$ Elationen besitzen, deren Ordnung ist dann $\leq n$. Ist $u \in U$ eine Homologie, so muß ebenfalls $o(u) \leq n$ sein, ansonsten hätte die Kurve C zu viele kollineare Punkte. Wird $u \in U$ von einer Matrix mit $|\{1, \lambda, \mu\}| = 3$ induziert, ist $o(u) < \infty$ wegen Satz 24. Diejenigen Kollineationen aus $H \cap \Gamma_C$, die genau zwei Fixpunkte haben, können keine unendliche Ordnung haben wegen Satz 25. Also sind die Elementordnungen in U endlich.

Zur Beschränktheit der Elementordnungen:

Für eine Matrix mit $|\{1, \lambda, \mu\}| = 3$ betrachte die drei Fixpunkte S, F_1, F_2 der zugehörigen Kollineation u . Die Kurve C hat auf $g := F_1 \vee F_2$ wegen (2) mindestens einen Punkt $P \notin \{F_1, F_2\}$. Nehmen wir oBdA. $F_1 = (0 : 1 : 0)$ und $F_2 = (0 : 0 : 1)$ an sowie $P = (0 : 1 : y)$ mit $y \neq 0$. Diese Annahme kann man machen, da eine geeignete Koordinatentransformation mit einer Matrix aus H' durchgeführt werden kann. Die Bahn von P unter $\langle u \rangle$ ist dann $P^{\langle u \rangle} = \{(0 : 1 : (\frac{\mu}{\lambda})^k y) : k \in \mathbb{Z}\}$ mit $|P^{\langle u \rangle}| \leq n$, also $m := o(\frac{\mu}{\lambda}) \leq n$. Da u^m eine Homologie ist, ist $o(u^m) \leq n$, deshalb ist $o(u) \leq mn \leq n^2$.

Für eine Matrix A mit $|\{1, \lambda, \mu\}| = 2$, die keine Homologie induziert, kann man oBdA. annehmen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad b \neq 0, \quad \mu \neq 1, \quad m := o(\mu) < \infty$$

Diese Annahme kann man machen, da Kollineationen vom Typ (bii) aus (1) mit $c \neq 0$ innerhalb G konjugiert sind zu einer Kollineation, die gegeben ist durch eine Matrix wie A . Es ist

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & mb & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und A^m induziert eine Elation. Für $\text{char}\mathbb{L} = 0$ ist das natürlich kein Element aus U . Für $\text{char}\mathbb{L} = p > 2$ betrachte

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \sum_{i=0}^{p-1} \mu^i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^p \end{pmatrix}$$

sowie die von A induzierte Kollineation u . Es ist $o(u^p) = o(\mu^p) = o(\mu) = m$, und weil u^p eine Homologie ist, ist $m \leq n$, somit $o(u) \leq pn$.

(4) Wir zeigen: Die Charakteristik von \mathbb{L} ist endlich und Γ_C enthält unendlich viele Elationen mit Zentrum $S = (1 : 0 : 0)$.

⁵Die Gruppe U_Ω wird dabei aufgefaßt als die Menge der Kollineationen in U , die die Punkte aus Ω punktweise festlassen.

Es sei $z(\lambda, \mu)$ die Kollineation, die von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

induziert wird. Die Kollineation $\tau(b, c)$ sei gegeben von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $H = Z \times N$ mit $Z = \{z(\lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{L}_*\}$ und $N = \{\tau(b, c) : b, c \in \mathbb{L}\}$. Es sei $Z_C = \{z(\lambda, \mu) \in Z : \exists \tau(b, c) \in N \text{ mit } z(\lambda, \mu)\tau(b, c) \in U\}$. Wegen (3) ist Z_C eine endliche Menge. Weil $|U| = \infty$ ist, existiert somit ein $z_0 \in Z_C$, so daß die Menge $Z_0 := \{\tau \in N : z_0\tau \in U\}$ unendlich viele Elemente besitzt. Betrachte nun eine (fest gewählte) Kollineation $\tau_0 \in N$ mit $z_0\tau_0 \in U$ sowie die Menge $\{(z_0\tau_0)^{-1}z_0\tau : \tau \in Z_0\} = \{\tau_0^{-1}\tau : \tau \in Z_0\} \subseteq N \cap U$. Wegen $|Z_0| = \infty$ haben wir schließlich $|\{\tau_0^{-1}\tau : \tau \in Z_0\}| = \infty$, also $|N \cap U| = \infty$. Da für $\text{char}\mathbb{L} = 0$ die Gruppe $\Gamma_C \cap N$ nur die Identität enthalten kann, gilt $\text{char}\mathbb{L} = p > 2$.

(5) Die Gruppe U kann für $\text{char}\mathbb{L} = p$ nicht unendlich viele Elationen mit Zentrum $(1 : 0 : 0)$ enthalten (man argumentiere wie in (2)). Damit ist die Annahme $|U| = \infty$ zum Widerspruch geführt. \square

Als Konsequenz des letzten Satzes ergibt sich für eine singuläre irreduzible algebraische Kurve, die weder eine VP-Kurve noch eine Translationkurve ist, aber eine unendliche Kollineationsgruppe hat, daß C genau eine Singularität mit genau einer Tangente besitzt. Die Frage ist nun, ob es solche Kurven überhaupt gibt. Für $\text{char}\mathbb{L} = 0$ fällt die Antwort negativ aus.

HILFSSATZ 27 *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char}\mathbb{L} = 0$ und C eine singuläre irreduzible algebraische Kurve vom Grad $n \geq 3$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die keine VP-Kurve ist. Dann gilt:*

Die Kollineationsgruppe Γ_C der Kurve C ist endlich.

Beweis:

Wir nehmen an, daß $|\Gamma_C| = \infty$ ist.

(1) Aus den vorherigen Sätzen folgt, wie bereits erwähnt, daß C nur eine Singularität S haben kann und S wiederum nur eine Tangente T . Wir setzen oBdA. $S = (1 : 0 : 0)$ und $T = [0 : 1 : 0]$. Wenn S ein s -facher Punkt ist mit $s \in \{2, \dots, n-1\}$, ist C die Nullstellenmenge eines Polynoms $F \in \mathbb{L}[w, x, y]$ mit

$$F(w, x, y) = w^{n-s}x^s + w^{n-s-1}f_{s+1}(x, y) + \dots + wf_{n-1}(x, y) + f_n(x, y).$$

Dabei sind die $f_i \in \mathbb{L}[x, y]$ homogene Formen vom Grad i . Wir setzen noch $f_s(x, y) := x^s$. Auf T liegt, abgesehen von S , kein weiterer Punkt von C . Denn wenn $\Omega := T \cap C$ mehr als einen Punkt enthielte, wäre der Stabilisator Γ_Ω von Ω in Γ_C nicht endlich wegen $[\Gamma_C : \Gamma_\Omega] < \infty$. Das widerspricht aber Satz 25, da C keine VP-Kurve ist.

(2) Wir betrachten nun die k -ten partiellen Ableitungen von F nach w für $k \in \{0, \dots, n-s-1\}$:

$$F_k := \partial_w^k F = \sum_{i=k}^{n-s} f_{n-i}(x, y) \frac{i!}{(i-k)!} w^{i-k}$$

Für $k = 0, \dots, n-s-1$ sei C_k die Nullstellenmenge des Polynoms $F_k(w, x, y)$ vom Grad $n-k$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$. Für jedes $\gamma \in \Gamma_C$ sowie jedes $k \in \{0, \dots, n-s-1\}$ gilt nun:

$$(C_k)^\gamma = C_k$$

Um das einzusehen, betrachte eine Matrix $A = (a_{ij})$, die die Kollineation γ induziert. Ganz allgemein gilt:

$$A^T \begin{pmatrix} \partial_w(FA^{-1}) \\ \partial_x(FA^{-1}) \\ \partial_y(FA^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_w F)A^{-1} \\ (\partial_x F)A^{-1} \\ (\partial_y F)A^{-1} \end{pmatrix}$$

und deswegen $a_{11}\partial_w(FA^{-1}) + a_{21}\partial_x(FA^{-1}) + a_{31}\partial_y(FA^{-1}) = (\partial_w F)A^{-1}$. Wenn γ die Kurve C fixiert, ist $a_{21} = a_{31} = 0$ sowie $a_{11} \neq 0$ wegen $S^\gamma = S$. Man kann A normieren, indem man $a_{11} = 1$ setzt. Damit ist dann

$$\partial_w(FA^{-1}) = (\partial_w F)A^{-1}.$$

Da $C = C^\gamma$ die Nullstellenmenge von FA^{-1} ist, ist C_1 auch die Nullstellenmenge von $\partial_w(FA^{-1})$. Andererseits ist $(C_1)^\gamma$ die Nullstellenmenge von $(\partial_w F)A^{-1}$, also:

$$C_1 = (C_1)^\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma_C$$

Rekursiv⁶ folgt dann $C_k = (C_k)^\gamma \quad \forall k \in \{0, \dots, n-s-1\}, \quad \forall \gamma \in \Gamma_C$.

(3) Wir setzen nun $m := n-s$ und betrachten die Kurve C_{m-1} , gegeben durch

$$F_{m-1}(w, x, y) = (m-1)!(mx^s w + x^r g_{s+1-r}(x, y))$$

mit $r \in \{0, \dots, s+1\}$, einer homogenen Form $g_{s+1-r} \in \mathbb{L}[x, y]$ vom Grad $s+1-r$ und mit $x \nmid g_{s+1-r}$.

Falls $r = s$ ist, ist C_{m-1} die Nullstellenmenge von

$$x^s(mw + g_1(x, y)) = 0.$$

Wegen $m \neq 0$ und $C_{m-1}^\gamma = C_{m-1}$ für $\gamma \in \Gamma_C$ muß jedes Element aus Γ_C die Gerade l mit der Gleichung $mw + g_1(x, y) = 0$ festlassen. Es ist $l \neq T = [0 : 1 : 0]$ und $S \notin l$. Also muß Γ_C einen zweiten Fixpunkt $l \cap T$ haben, ein Widerspruch zu Satz 25.

Falls $r = s+1$ ist, ist C_{m-1} die Nullstellenmenge von

$$x^s(mw + xg_0(x, y)) = 0.$$

In der Klammer steht wieder eine Geradengleichung, und damit ergibt sich ein Widerspruch mit demselben Argument wie vorher.

Falls $r < s$ ist, ist C_{m-1} die Nullstellenmenge von

$$x^r(mx^{s-r}w + g_{s+1-r}(x, y)) = 0.$$

⁶Man beachte, daß die Kurven C_i dieselbe Singularität wie C haben.

Betrachten wir die Komponente in der Klammer. Alle Punkte $P = (w : x : y)$ mit $P \notin [0 : 1 : 0]$ sind oBdA. gegeben durch $P = (w : 1 : y)$. Ein Punkt P auf $C_{m-1} \setminus [0 : 1 : 0]$ ist dann von der Form $P = (w(y) : 1 : y)$ mit $y \in \mathbb{L}$ und

$$w(y) = -\frac{1}{m}g_{s+1-r}(1, y) =: \frac{1}{m}h(y).$$

Das Polynom $h \in \mathbb{L}[y]$ hat den Grad $s + 1 - r$, da $x \nmid g_{s+1-r}$. Die affine Kurve

$$\{(y, h(y)) \in \mathbb{L}^2 : y \in \mathbb{L}\}$$

hat einen Wendepunkt, wenn $h''(y)$ einen Grad ≥ 1 hat. Diese affine Kurve darf aber keine Wendepunkte haben, denn wenn die (endliche) Menge

$$W := \left\{ \left(\frac{1}{m}h(y) : 1 : y \right) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : (y, h(y)) \text{ ist Wendepunkt von } h \right\}$$

nicht leer ist, operiert Γ_C auf W . Dann ist der Stabilisator Γ_W von W in Γ_C eine unendliche Gruppe wegen $[\Gamma_C : \Gamma_W] < \infty$. Wegen Satz 25 folgt deswegen:

$$\deg(h) = s + 1 - r \leq 2$$

Wegen $r < s$ ist also $r = s - 1$ und weiter $F_{m-1}(w, x, y) = m!x^{s-1}(wx + \frac{1}{m}g_2(x, y))$ mit einer nicht durch x teilbaren homogenen Form g_2 vom Grad zwei. Es sei \widehat{K} die Nullstellenmenge von

$$wx + \frac{1}{m}g_2(x, y) = 0.$$

Die Kurve \widehat{K} hat den Grad zwei und ist eine Komponente von C_{m-1} . Ist \widehat{K} reduzibel, so ist, da der Term wx auftritt, ein Faktor die Gleichung einer Geraden l mit $S \notin l$. Dann hätte wegen $\widehat{K}^\gamma = \widehat{K} \forall \gamma \in \Gamma_C$ die Gruppe Γ_C einen weiteren Fixpunkt $l \cap T \neq S$, ein Widerspruch zu Satz 25. Deshalb ist \widehat{K} ein nichtentarteter Kegelschnitt, der den Punkt $(1 : 0 : 0)$ enthält und dort dieselbe Tangente wie C hat.

(4) Nun führen wir eine Koordinatentransformation α durch, so daß $S^\alpha = (0 : 0 : 1)$, $T^\alpha = [1 : 0 : 0]$ und $\widehat{K}^\alpha =: K = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : wy - x^2 = 0\}$ ist. Da alle nichtentarteten Kegelschnitte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ projektiv äquivalent sind, kann man das machen. Es ist $K \cap C^\alpha = S^\alpha$, denn wäre $|K \cap C^\alpha| \geq 2$, so müßte Γ_C auf der endlichen Menge der Schnittpunkte $K \cap C^\alpha$ operieren und der Stabilisator dieser Schnittpunkte in Γ_C hätte unendlich viele Elemente sowie mindestens zwei Fixpunkte, ein Widerspruch zu Satz 25. Wegen Hilfssatz 19 gilt nun, daß Γ_{C^α} induziert wird durch eine Untergruppe von

$$H' := \left\{ h'(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & \lambda & 0 \\ t^2 & 2\lambda t & \lambda^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : t \in \mathbb{L}, \lambda \in \mathbb{L}_* \right\} < GL_3(\mathbb{L}).$$

Es sei H die durch H' gegebene Kollineationsgruppe und $h(t, \lambda)$ die durch die Matrix $h'(t, \lambda)$ definierte Kollineation. Weiter sei

$$Z_C := \{h(0, \lambda) \in H : \exists t \in \mathbb{L} \text{ mit } h(t, 1)h(0, \lambda) \in \Gamma_{C^\alpha}\}.$$

Wir zeigen nun: $|Z_C| < \infty$

Man rechnet leicht nach, daß $o(h(t, \lambda)) = o(\lambda)$ ist für $\lambda \neq 1$. Wenn $|\{1, \lambda, \lambda^2\}| = 3$ ist, wähle man einen Punkt $P \in C$, der nicht auf dem Fixdreieck von $h(t, \lambda)$ liegt. Dann existiert ein (nichtentarteter) Kegelschnitt K_P mit $P^{(h(t, \lambda))} \subset K_P$ und $|P^{(h(t, \lambda))}| = o(\lambda)$ (vgl. Abschnitt 2.1). Da für

$h(t, \lambda) \in \Gamma_C$ dann $P^{(h(t, \lambda))} \subset K \cap C$ ist und C irreduzibel vorausgesetzt war, ist $o(\lambda) \leq 2n$ (Satz von Bézout). Damit folgt $|Z_C| < \infty$.

Deswegen existiert ein $h_0 \in Z_C$, so daß die Menge $Z_0 := \{h(t, 1) \in H : h(t, 1)h_0 \in \Gamma_{C^\alpha}\}$ unendlich viele Elemente besitzt. Wählen wir ein $h(t_0, 1) \in Z_0$ aus und betrachten die Menge $H_0 := \{h(t_0, 1)h_0(h(t, 1)h_0)^{-1} : h(t, 1) \in Z_0\} = \{h(t_0 - t, 1) : h(t, 1) \in Z_0\} \subset \Gamma_{C^\alpha}$. Wegen $|Z_0| = \infty$ ist auch $|H_0| = \infty$. Die nichttrivialen Kollineationen von H_0 haben unendliche Ordnung und für jeden Punkt $P \in C$, $P \notin [1 : 0 : 0]$ sowie jedes $h \in H_0 \setminus \{\text{id}\}$ existiert ein (nichtentarteter) Kegelschnitt K_P mit $P^{(h)} \subset K_P$, $|P^{(h)}| = \infty$. Wäre also so ein h in Γ_{C^α} enthalten, so wäre wegen $|C^\alpha \cap K_P| = \infty$ die Kurve C reduzibel (Satz von Bézout), der gewünschte Widerspruch. \square

Damit ist nun der Fall $\text{char } \mathbb{L} = 0$ vollständig geklärt. Für $\text{char } \mathbb{L} = p > 2$ findet man neben den VP-Kurven und den Translationskurven überraschenderweise noch einen dritten Kurventyp, der eine unendliche Kollineationsgruppe haben kann. Da diese Kurven mit Kegelschnitten verwandt sind, nennen wir sie KV-Kurven.

DEFINITION 15 Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \neq 2$ und $C \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ die Nullstellenmenge des homogenen Polynoms

$$F(w, x, y) = \sum_{i=0}^N (w^2)^{p^N - p^i} (F_i(w, x, y))^{p^i}$$

vom Grad $n = 2p^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ sowie homogene Formen $F_i(w, x, y) = \alpha_i wx + \beta_i wy + \frac{1}{2}\beta_i x^2$ vom Grad 2. Dabei gelte $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0, 0)$, $\beta_N \neq 0$ und für ein $i \in \{1, \dots, N\}$ sei $(0, 0) \neq (\alpha_i, \beta_i) \notin \mathbb{L} \cdot (\alpha_0, \beta_0)$. Eine Kurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die projektiv äquivalent ist zu einer Kurve C , heißt KV-Kurve.

Eine KV-Kurve hat genau eine Singularität $S = (0 : 0 : 1)$, diese wiederum hat genau eine Tangente, nämlich $[1 : 0 : 0] = [\infty]$. Man kann $[\infty]$ als unendlich ferne Gerade bzgl. einer affinen Ebene auffassen. Betrachtet man die zugehörige affine Kurve, in diesem Fall $C \setminus \{S\}$ als Nullstellenmenge der Gleichung $F(1, x, y) = 0$, so sieht man, daß F die Summe von Formen $F_i(1, x, y)$ ist, auf die der Frobeniusautomorphismus angewandt wird:

$$F(1, x, y) = \sum_{i=0}^N (\alpha_i x + \beta_i y + \frac{1}{2}\beta_i x^2)^{p^i}$$

Diejenigen $F_i(1, x, y)$, die von Null verschieden und irreduzibel sind, definieren Parabeln, die die unendlich ferne Gerade alle im selben Punkt $S = (0 : 0 : 1)$ berühren. Affin treffen sie sich im Punkt $(0, 0)$, der dem projektiven Punkt $(1 : 0 : 0)$ entspricht.

Es gibt KV-Kurven C , die irreduzibel sind, z.B. für $N = 1$, $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 0)$, $(\alpha_1, \beta_1) = (0, 1)$ erhält man:

$$F(w, x, y) = (w^2)^{p-1}(wx) + (w^2)^0(wy + \frac{1}{2}x^2)^p = w^{2p-1}x + w^p y^p + \frac{1}{2}x^{2p}$$

Um die Irreduzibilität von F in diesem Fall zu zeigen, betrachten wir das affine Polynom $f(x, y) := F(1, x, y) = y^p + x + \frac{1}{2}x^{2p}$. Genau dann ist F irreduzibel, wenn f irreduzibel ist (vgl. [15], S.18, Thm. 3.18). Fassen wir nun $f(x, y) \in \mathbb{L}[x, y]$ als Polynom in y über dem Körper $\mathbb{L}(x)$ auf und setzen $a := -x - \frac{1}{2}x^{2p}$, so liegt das Polynom $y^p - a \in (\mathbb{L}(x))[y]$ vor. Da a keine p -te Potenz in $\mathbb{L}(x)$ ist, ist dieses Polynom irreduzibel über $\mathbb{L}(x)$ (vgl. [11], S.297, Thm. 9.1). Dann liegt über $\mathbb{L}[x]$ erst

recht Irreduzibilität vor.

Daß KV-Kurven unendliche Kollineationsgruppen besitzen, wird im nächsten Satz gezeigt.

HILFSSATZ 28 *Es sei $p \neq 2$ eine Primzahl und \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p . Weiter sei C eine irreduzible algebraische Kurve vom Grad $n \geq 3$ in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die mindestens eine Singularität S besitzt. Außerdem sei C weder eine VP-Kurve noch eine Translationskurve.*

Für die Kollineationsgruppe Γ_C von C gelte: $|\Gamma_C| = \infty$

Dann gilt:

(I) C ist eine KV-Kurve

(II) In der Darstellung von Definition 15 hat eine KV-Kurve C die Kollineationsgruppe $\Gamma_C = V \rtimes Z$ mit einem Normalteiler V von endlichem Index, der induziert wird von $V' < GL_3(\mathbb{L})$,

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : a : b) \in C \right\}.$$

Der Faktor Z ist isomorph zu einer endlichen Gruppe, die repräsentiert wird von Diagonalmatrizen aus Z' ,

$$Z' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : c \in M \right\}.$$

Die Menge M ist eine durch die vorliegende Kurve eindeutig bestimmte endliche multiplikative Untergruppe von \mathbb{L}_* .

Beweis:

Der Beweis ist in 16 Schritte unterteilt. In (1) findet sich eine Liste diverser Ergebnisse früherer Sätze sowie anderer benötigter Aussagen.

Die Schritte (2) bis einschließlich (8) beschäftigen sich mit der Gruppe Γ_C bzw. dem Auffinden einer geeigneten – handlicheren – Untergruppe V von Γ_C mit $|V| = \infty$.

In den Schritten (9) bis (14) wird das Polynom $F = \sum a_{ijk} w^i x^j y^k$ der Kurve C , das unter der Wirkung von V invariant sein muß, betrachtet. Dabei gelingt es, die Koeffizienten a_{ijk} aller echt gemischten Monome ($i, j, k \geq 1$) und einen Großteil der verbleibenden a_{ijk} (i oder j oder $k = 0$) zu Null zu diskutieren.

In Schritt (15) wird das Polynom F noch geeignet umgeformt, in Schritt (16) schließlich wird (II) gezeigt.

(1) Es sei oBdA. $S = (0 : 0 : 1)$ ein s -facher Punkt, $2 \leq s \leq n - 1$. Wir fassen kurz einige später benötigte Aussagen zusammen:

- a) Die Kurve C hat keine weitere Singularität.
- b) Die Singularität S hat nur eine Tangente T_S , oBdA. $T_S = [1 : 0 : 0] = [\infty]$.
- c) $C \cap T_S = \{S\}$

- d) Der Schnitt von Γ_C mit dem Stabilisator zweier (verschiedener) Punkte ist endlich (Satz 25).
- e) Der Schnitt von Γ_C mit dem Stabilisator zweier (verschiedener) Geraden ist endlich (Satz 26).
- f) Der Schnitt von Γ_C mit dem Stabilisator eines (nichtentarteten) Dreiecks ist endlich (Satz 24).
- g) Die Kurve C kann mit einer Geraden höchstens n Schnittpunkte haben. Insbesondere gilt, daß Γ_C keine Perspektivität der Ordnung $> n$ haben kann.
- h) Wenn $(0 : 0 : 1)$ s -facher Punkt ist, ist C die Nullstellenmenge von

$$F(w, x, y) = \sum_{k=s}^n y^{n-k} f_k(w, x)$$

mit homogenen Formen f_k vom Grad k . Die Form $f_s \neq 0$ zerfällt in s Stück (nicht notwendigerweise verschiedene) Linearfaktoren L_i . Die Tangenten an S sind gegeben durch die Gleichungen $L_i = 0$.

- i) Für alle Geraden g durch S , die nicht Tangente an S sind, gilt für die Schnittmultiplizität m von S mit g bzgl. C :

$$m(C, S, g) = s$$

- j) Für eine Primzahl $p \neq 2$ und natürliche Zahlen n, k mit $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt (vgl. Bemerkung 3 auf Seite 23):

$$\begin{array}{ll} p \mid \binom{n}{k} \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\} & \Leftrightarrow n = p^i \text{ für ein } i \in \mathbb{N} \\ \forall i \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2p^i : & p \nmid \binom{2p^i}{k} \Leftrightarrow k = p^i \end{array}$$

(2) Es sei

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \lambda & 0 \\ b & c & \mu \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : a, b, c, \lambda, \mu \in \mathbb{L} \right\} < GL_3(\mathbb{L})$$

und H die von H' induzierte Untergruppe der $PGL_3(\mathbb{L})$. Da jede Kollineation aus Γ_C die Singularität S mitsamt ihrer Tangente T_S festlassen muß, ist $\Gamma_C < H$. Man kann H' in ein semidirektes Produkt zerlegen:

$$\begin{array}{l} H' = N' \rtimes Z' \text{ mit} \\ N' = \left\{ n'(a, b, c) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \in H' : a, b, c \in \mathbb{L} \right\} < H' \\ Z' = \left\{ z'(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in H' : \lambda, \mu \in \mathbb{L}_* \right\} < H' \end{array}$$

Sind $N, Z, n(a, b, c), z(\lambda, \mu)$ die von obigen Untergruppen bzw. linearen Abbildungen induzierten projektiven Gruppen bzw. Kollineationen, so ergibt sich für jede Kollineation $h \in H$ eine eindeutige Darstellung $h = n(a, b, c)z(\lambda, \mu)$.

(3) Zunächst wird gezeigt: In Γ_C gibt es kein Element mit unendlicher Ordnung.

Es sei $h = n(a, b, c)z(\lambda, \mu) \in \Gamma_C$, $h \neq id$.

Falls $|\{1, \lambda, \mu\}| = 3$ ist, hat h ein nichtentartetes Fixdreieck. Wegen (1f) ist dann $o(h) < \infty$.

Falls $|\{1, \lambda, \mu\}| = 2$ ist, ist – falls h' diagonalisierbar ist – h eine Homologie, also $o(h) \leq n$ wegen (1g). Ist h' nicht diagonalisierbar, so ist h^p eine Homologie und damit $o(h^p) \leq n$. Dann ist $o(h) \leq pn$.

Für $\lambda = \mu = 1$ ist $h \in N$ und $o(h) = p$.

(4) Nun wird gezeigt: Die Menge der Elementordnungen $\{o(h) : h \in \Gamma_C\}$ ist nach oben beschränkt.

Angenommen, die Elementordnungen von Γ_C werden beliebig groß. Dann existiert eine Kollineation $h = n(a', b', c')z(\lambda, \mu) \in \Gamma_C$, so daß $n^3 < o(h)$ ist und $|\{1, \lambda, \mu\}| = 3$, denn die Ordnungen der Kollineationen $h \in \Gamma_C$, für die h' keine drei verschiedenen Eigenwerte hat, sind durch pn nach oben beschränkt.

Es sei Δ das Fixdreieck von h mit Ecken S, P, Q , weiter $P \in [\infty]$ ($P \notin C$ wegen (1c)). Außerdem:

$$\begin{aligned} g &:= Q \vee P \\ l &:= Q \vee S \\ \Omega_g &:= (g \setminus \{Q\}) \cap C, \quad \Omega_h := (l \setminus \{Q, S\}) \cap C, \quad \Omega = \Omega_g \cup \Omega_h \\ o(\lambda) &:= ad, \quad o(\mu) := bd, \quad d := ggT(o(\lambda), o(\mu)) \end{aligned}$$

Es ist $o(h) = kgV(o(\lambda), o(\mu)) = abd$. Weil $h^{o(\lambda)}$ und $h^{o(\mu)}$ Homologien sind, gilt wegen (1g):

$$\begin{aligned} b &= o(\mu^{o(\lambda)}) = o(h^{o(\lambda)}) \leq n \\ a &= o(\lambda^{o(\mu)}) = o(h^{o(\mu)}) \leq n \end{aligned}$$

Wegen $n^3 < o(h) = abd$ ist demnach $n < d$. Betrachte nun die Kollineation $\gamma = h^{ab}$ mit $o(\gamma) = d$. Jeder Punkt aus Ω hat unter $\langle \gamma \rangle$ eine kollineare Bahn der Länge d , aber wegen $d > n$ und (1g) folgt:

$$\Omega = \emptyset$$

Es sei nun oBdA. Δ das Einheitsdreieck, also $Q = (1 : 0 : 0)$, $P = (0 : 1 : 0)$. Der einfache Punkt Q muß die Gerade g als Tangente haben, denn sonst wäre $\Omega_g \neq \emptyset$. Es ist $m(C, S, l) = s$, da l keine Tangente von S ist (vgl. (1b), (1i)). Außerdem ist $m(C, Q, l) = 1$, da Q nicht l , sondern g als Tangente hat. Wegen $l \cap C = \{Q, S\}$ ist also $s + 1 = n$. Dann hat C die Gleichung

$$F(w, x, y) = yw^{n-1} + f_n(w, x)$$

wobei f_n eine homogene Form vom Grad n ist (vgl. (1b), (1h)). Da Q der einzige Schnittpunkt von g mit C ist, folgt:

$$\exists c \in \mathbb{L} : F(w, x, 0) = f_n(w, x) = c \cdot x^n$$

Dann ist aber C eine VP-Kurve ($c \neq 0$) oder reduzibel ($c = 0$), ein Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes.

(5) Es sei $U = \Gamma_C \cap N$. Dann muß gelten: $|U| = \infty$

Es sei $Z_C := \{z(\lambda, \mu) \in Z : \exists n \in N \text{ mit } nz(\lambda, \mu) \in \Gamma_C\}$. Die Menge Z_C enthält nur endlich viele

Elemente, was man folgendermaßen einsieht:

Es sei M die größte auftretende Elementordnung in Γ_C (vgl. (4)), weiter sei $h = nz(\lambda, \mu) \in \Gamma_C$ mit $n \in N$, $z(\lambda, \mu) \in Z$, $o(h) = k \leq M$. Wegen $h^k = \widehat{n}(z(\lambda, \mu))^k$ für ein $\widehat{n} \in N$ und $h^k = id$ ist dann $(z(\lambda, \mu))^k = id$. Aber $o(z(\lambda, \mu)) = kgV(o(\lambda), o(\mu))|k$ liefert $o(\lambda) \leq k$ und $o(\mu) \leq k$, also:

$$z(\lambda, \mu) \in Z_C \Rightarrow o(\lambda) \leq M, o(\mu) \leq M \Rightarrow |Z_C| < \infty.$$

Weil aber $|\Gamma_C| = \infty$ ist, existiert ein $z_0 \in Z_C$, so daß die Menge $Z_0 := \{n \in N : nz_0 \in \Gamma_C\}$ unendlich viele Elemente besitzt. Betrachte nun ein $n_0 \in N$ mit $n_0z_0 \in \Gamma_C$ sowie die Menge

$$\{n_0z_0(nz_0)^{-1} : n \in Z_0\} = \{n_0n^{-1} : n \in Z_0\} \subseteq N \cap \Gamma_C.$$

Wegen $|Z_0| = \infty$ ist auch $|\{n_0n^{-1} : n \in Z_0\}| = \infty$ und deshalb ist $|N \cap \Gamma_C| = \infty$.

Insbesondere folgt: $[\Gamma_C : U] < \infty$

(6) Es sei

$$U' = \left\{ n'(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \in N' : n(a, b, c) \in U \right\} \text{ und}$$

$$I = \{(a, b, c) \in \mathbb{L}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : n(a, b, c) \in U\}.$$

Eine Kollineation $n(a, b, 0)$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ ist eine Elation mit Zentrum $Z = (0 : a : b)$ und Achse $g = [\infty]$.

Eine Kollineation $n(0, b, c)$ mit $(b, c) \neq (0, 0)$ ist eine Elation mit Zentrum $Z = (0 : 0 : 1)$ und Achse $g = [b : c : 0]$.

Eine Kollineation $n(a, b, c)$ mit $ac \neq 0$ hat genau einen Fixpunkt (nämlich S) und genau eine Fixgerade (nämlich T_S).

Wegen (1d) und (1e) gilt:

$$|\{(0, b, c) \in \mathbb{L}^3 : (0, b, c) \in I\} \cup \{(a, b, 0) \in \mathbb{L}^3 : (a, b, 0) \in I\}| < \infty$$

Insbesondere ist also $|\{(a, b, c) \in I : ac \neq 0\}| = \infty$.

(7a) Man kann annehmen, daß n_0 , induziert durch

$$n'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

in U enthalten ist:

Für $n_0 \notin U$ betrachte $\widehat{n} := \widehat{n}(a_0, b_0, c_0) \in U$ mit $a_0c_0 \neq 0$, weiter

$$h'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{b_0}{a_0c_0} & \frac{1}{a_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_0c_0} \end{pmatrix}, \quad h'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad h := h_2h_1.$$

Wegen $n'_0 = h'\widehat{n}'h'^{-1}$ ist n_0 im Stabilisator $(\Gamma_C)^h = \Gamma_{C^h}$ von C^h enthalten. Da $h \in H$ ist und $N \triangleleft H$, kann man statt (Γ_C, C) bzw. (U, C) die projektiv äquivalente Situation (Γ_{C^h}, C^h) bzw.

(U^h, C^h) betrachten: Es ist $N^h = N$ und deshalb $U^h = (\Gamma_C \cap N)^h = \Gamma_{C^h} \cap N$.

(7b) Man kann annehmen, daß der Punkt $(1 : 0 : 0)$ auf der Kurve C liegt:

Rechnet man den Zentralisator $Z(n'_0)$ von n'_0 in N' aus, so erhält man

$$Z(n'_0) = \{n'(a, b, c) \in N' : c = -a\}, \text{ denn}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac - b & -c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -a - c & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Falls $(1 : 0 : 0)$ nicht auf C liegt, wähle man einen Punkt $P = (1 : x : y) \in C \setminus \{S\}$ und betrachte die Kollineation h , die von

$$h' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ -x^2 - y & x & 1 \end{pmatrix} \in Z(n'_0)$$

induziert wird. Wegen $P^h = (1 : 0 : 0)$ enthält die Kurve C^h den Punkt $(1 : 0 : 0)$ und U^h enthält das Element n_0 . Also kann man statt C die Kurve C^h betrachten, denn wegen $h \in Z(n'_0)$ enthält die Gruppe U^h ebenfalls das Element n_0 .

(7c) Eine für später wichtige Konsequenz aus (7b) ist wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix},$$

daß für alle $(a, b, c) \in I$ gilt: $(1 : a : b) \in C$ (*)

(8) Es sei $J = \{(a, b) \in \mathbb{L}^2 : (a, b, -a) \in I\}$, weiter $V' := \{n'(a, b, -a) \in N' : n'(a, b, -a) \in U'\}$ sowie V die von $V' \cup \{n'(0, 0, 0)\}$ induzierte Untergruppe der $PGL_3(\mathbb{L})$.

Wir zeigen nun: $|V| = \infty$

Angenommen, $|V| < \infty$. Jetzt lassen wir die Gruppe U auf ihren Elementen durch Konjugation operieren. Weil V der Zentralisator von n_0 in U ist (vgl. (7b)), hat man $[U : V] = |n_0^U|$. Wegen $|U| = \infty$ folgt aus der Annahme $|V| < \infty$, daß $|n_0^U| = \infty$ ist. Die Menge n_0^U wird induziert von der Menge $n_0^{U'}$:

$$n_0^{U'} = \{n'(-1, -a - c, 1) \in N' : (a, b, c) \in I \cup \{(0, 0, 0)\}\} \subseteq U'$$

Dann ist aber $n_0^{-1}n_0^U$ eine unendliche Teilmenge von U , induziert von $n_0'^{-1}n_0^{U'}$:

$$n_0'^{-1}n_0^{U'} = \{n'(0, -a - c, 0) \in N' : (0, -a - c, 0) \in I \cup \{(0, 0, 0)\}\}$$

Das ist ein Widerspruch zu (6).

Wir betrachten also ab jetzt $V \leq \Gamma_C$, $|V| = \infty$, induziert von

$$V' = \left\{ n'(a, b) := n'(a, b, -a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} \in N' : (a, b) \in J \cup \{(0, 0)\} \right\} < GL_3(\mathbb{L})$$

(10) Jetzt wird gezeigt, daß die Konstante $c(a, b)$ für alle $(a, b) \in J$ gleich 1 sein muß:

Betrachte für $(a, b) \in J$ die Koeffizienten $b_{s,0,n-s}(a, b)$ und $c_{s,0,n-s}(a)$:

$$b_{s,0,n-s}(a, b) \stackrel{(B')}{=} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k \geq n-s}} a_{i,j,k} \binom{j}{0} \binom{k}{n-s} a^j b^{k-(n-s)} \stackrel{(A)}{=} a_{s,0,n-s} \neq 0$$

$$c_{s,0,n-s}(a) \stackrel{(B')}{=} \sum_{\gamma=0}^0 a_{s,0-\gamma,n-s+\gamma} \binom{n-s+\gamma}{\gamma} a^\gamma = a_{s,0,n-s} \neq 0$$

Für $(i) = (s, 0, n-s)$ liefert (B'') dann $c(a, b) = 1 \forall (a, b) \in J$. Wir erhalten also:

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \forall (a, b) \in J, \forall (i) \in I_n, (i) = (i_1, i_2, i_3) : \\ b_{(i)}(a, b) = \sum_{\substack{j \geq i_2 \\ k \geq i_3}} a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} a^{j-i_2} b^{k-i_3} \\ c_{(i)}(a) = \sum_{\gamma=0}^{i_2} a_{i_1, i_2-\gamma, i_3+\gamma} \binom{i_3+\gamma}{\gamma} a^\gamma \\ b_{(i)}(a, b) = c_{(i)}(a) \end{array} \right. \quad (B''')$$

$$\left. \begin{array}{l} b_{i_1, i_2, i_3}(a, b) = 0 \quad \forall i_3 > n-s \\ b_{i_1, i_2, n-s}(a, b) = 0 \quad \forall i_2 \neq 0 \\ b_{s, 0, n-s}(a, b) = a_{s, 0, n-s} \neq 0 \\ b_{0, i_2, n-i_2}(a, b) = 0 \quad \forall i_2 < n \\ b_{0, n, 0}(a, b) = a_{0, n, 0} \neq 0 \\ b_{n, 0, 0} = 0 \end{array} \right\} \quad (B''')$$

Die Bedingungen (B''') erhält man entweder durch Nachrechnen (unter Verwendung von (A) und (B'') sowie $c(a, b) = 1$) oder aber man überlegt sich, daß die Kurve $C_{(a,b)}$ für $(a, b) \in J$ dieselben Bedingungen aus (1) erfüllt, die für das System (A) der Koeffizienten von F herangezogen wurden.

(11) Werfen wir einen Blick auf die Ausdrücke $b_{(i)}(a, b)$ und $c_{(i)}(a)$ in (B) .

Ersetzt man darin die Paare $(a, b) \in J$ durch Unbekannte (x, y) , so kann man (für jedes $(i) \in I_n$) Polynome definieren:

$$\widehat{B}_{(i)}(x, y) := \sum_{\substack{j \geq i_2 \\ k \geq i_3}} a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} x^{j-i_2} y^{k-i_3}$$

$$\widehat{C}_{(i)}(x) := \sum_{\gamma=0}^{i_2} a_{i_1, i_2-\gamma, i_3+\gamma} \binom{i_3+\gamma}{\gamma} x^\gamma$$

Wegen $b_{(i)}(a, b) - c_{(i)}(a) = 0 \forall (a, b) \in J$ müssen dann alle $(a, b) \in J$ Nullstellen des Polynoms

$$Q_{(i)}(x, y) := \widehat{B}_{(i)}(x, y) - \widehat{C}_{(i)}(x)$$

sein. Betrachtet man nun die Homogenisierung $H_{(i)}(w, x, y)$ von $Q_{(i)}$ (falls $Q_{(i)}$ das Nullpolynom ist, ist auch $H_{(i)} = 0$) und die Kurve $C_{(i)}$, die die Nullstellenmenge von $H_{(i)}$ ist (falls $H_{(i)} = 0$ ist, ist $C_{(i)} = \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$), so findet man:

$$(1 : a : b) \in C_{(i)} \quad \forall (a, b) \in J, \quad \forall (i) \in I_n$$

Wegen (*) aus (7c) gilt aber auch:

$$(1 : a : b) \in C \quad \forall (a, b) \in J$$

Für jedes $(i) \in I_n$ gilt also wegen $|J| = \infty$:

$$|C_{(i)} \cap C| = \infty$$

Wir werden gleich zeigen, daß $H_{(i)}$ höchstens den Grad n hat. Da C irreduzibel ist, muß (Satz von Bézout) für alle $(i) \in I_n$ gelten:

$$(C') \left\{ \begin{array}{ll} C_{(i)} = C & \text{oder} \quad C_{(i)} = \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) \text{ bzw.} \\ H_{(i)} = \text{const.} \cdot F & \text{oder} \quad H_{(i)} = 0 \text{ bzw.} \\ Q_{(i)}(x, y) = \text{const.} \cdot F(1, x, y) & \text{oder} \quad Q_{(i)}(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

Deshalb werden wir solche $(i) \in I_n$ suchen, für die $H_{(i)}$ nicht a priori das Nullpolynom ist und für die $\deg H_{(i)} < n$ ist. Die in $H_{(i)}$ bzw. $Q_{(i)}$ auftretenden Koeffizienten müssen dann alle verschwinden. Auf diese Weise werden wir möglichst viele der a_{ijk} zu Null diskutieren.

(12) Der jeweils erste Summand von $\widehat{B}_{(i)}$ und $\widehat{C}_{(i)}$ ist gleich und hebt sich in $Q_{(i)}$ weg, denn es ist

$$a_{i_1, i_2, i_3} \binom{i_2}{i_2} \binom{i_3}{i_3} x^0 y^0 - a_{i_1, i_2, i_3} \binom{i_3}{0} x^0 = 0.$$

Somit ist dann

$$Q_{(i)}(x, y) = \underbrace{\sum_{\substack{j \geq i_2, k \geq i_3 \\ j+k > i_2+i_3}} a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} x^{j-i_2} y^{k-i_3}}_{=: B_{(i)}(x, y)} - \underbrace{\sum_{\gamma=1}^{i_2} a_{i_1, i_2-\gamma, i_3+\gamma} \binom{i_3+\gamma}{\gamma} x^\gamma}_{=: P_{(i)}(x)}.$$

Betrachtet man die Grade von $Q_{(i)}$, $B_{(i)}$ und $P_{(i)}$, so findet man:

- (a) $\deg(B_{(i)}) = n \Leftrightarrow (i) = (n, 0, 0)$
- (b) $\deg(P_{(i)}) < n \quad \forall (i) \in I_n$

Zu (a):

$$\begin{aligned} \text{„}\Rightarrow\text{“} \quad \deg(B_{(i)}) = n &\Rightarrow j - i_2 + k - i_3 = n \text{ für ein Paar } (j, k) \text{ mit } j \geq i_2, k \geq i_2, j+k > i_2+i_3 \\ &\Rightarrow i_2 + i_3 = 0 \Rightarrow (i) = (n, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{„}\Leftarrow\text{“} \quad B_{(n,0,0)} &= \sum_{\substack{j \geq 0, k \geq 0 \\ (j,k) \neq (0,0)}} a_{i,j,k} \binom{j}{0} \binom{k}{0} x^j y^k = \sum a_{i,j,k} x^j y^k \text{ (wegen } a_{n,0,0} = 0, \text{ vgl. (A))} \\ &= F(1, x, y) \Rightarrow \deg B_{(n,0,0)} = n \end{aligned}$$

Zu (b): Es ist $\deg(P_{(i)}) \leq i_2$. Wäre $\deg(P_{(i)}) = n$, so wäre $(i) = (0, n, 0)$, also $P_{(i)} = \sum_{\gamma=1}^n a_{0, n-\gamma, \gamma} \binom{\gamma}{\gamma} x^\gamma$. Der Koeffizient von x^n ist dann $a_{0,0,n}$, der ist aber wegen (A) gleich Null.

Aus (a) und (b) ergibt sich also:

$$\deg(Q_{(i)}) = \deg(B_{(i)} - P_{(i)}) = n \Leftrightarrow (i) = (n, 0, 0)$$

Für $(i) = (n, 0, 0)$ berechnet sich $Q_{(i)}$ zu

$$Q_{(i)} = \sum_{\substack{j \geq 0, k \geq 0 \\ j+k > 0}} a_{i,j,k} x^j y^k - 0 = F(1, x, y),$$

also ist $H_{(i)} = F$. Wir halten fest:

$$\forall (i) \in I_n \setminus \{(n, 0, 0)\} : \quad Q_{(i)}(x, y) = B_{(i)}(x, y) - P_{(i)}(x) = 0$$

(12) Wir spalten nun $B_{(i)}$ auf in eine Summe $D_{(i)} + E_{(i)}$, so daß $E_{(i)}$ nur Monome $x^\alpha y^\beta$ mit $\beta \geq 1$ enthält und $D_{(i)} \in \mathbb{L}[x]$ ist:

$$B_{(i)}(x, y) = \underbrace{\sum_{j \geq i_2 + 1} a_{i,j,i_3} \binom{j}{i_2} x^{j-i_2}}_{=: D_{(i)}(x)} + \underbrace{\sum_{\substack{j \geq i_2 \\ k \geq i_3 + 1}} a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} x^{j-i_2} y^{k-i_3}}_{=: E_{(i)}(x, y)}$$

Also:

$$(C) \quad Q_{(i)}(x, y) = E_{(i)}(x, y) + (D_{(i)}(x) - P_{(i)}(x)) = 0 \quad \forall (i) \in I_n \setminus \{(n, 0, 0)\}$$

(13) Betrachtung der $E_{(i)}$:

Da in $E_{(i)}$ nur Monome auftreten, die von y geteilt werden, $D_{(i)} - P_{(i)}$ aber keine Monome mit y enthält, muß gelten:

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (i) \in I_n \setminus \{(n, 0, 0)\}, (i) = (i_1, i_2, i_3) : \\ \forall (i, j, k) \in I_n \text{ mit } j \geq i_2, k \geq i_3 + 1 : \quad a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} = 0 \end{array} \right.$$

Wir betrachten nun Tupel $(i, j, k) \in I_n$ mit $j + k \geq 2, k \geq 1, k \leq n - s$ (denn für $j + k = 0$ ist $a_{i,j,k} = a_{n,0,0} = 0$ wegen (A), für $j + k = 1$ kommt $a_{i,j,k}$ in (D) nicht vor):

(a) $j = 0, k \geq 2$

Falls k keine p -Potenz ist, betrachte $(i) = (i_1, i_2, i_3)$ mit $i_2 = 0$ und $i_3 \in \{1, \dots, k-1\}$ mit $\binom{k}{i_3} \not\equiv 0 \pmod{p}$. So ein i_3 existiert wegen (1j).

Dann folgt:

$$\begin{aligned} a_{i,j,k} \binom{j}{i_2} \binom{k}{i_3} &= a_{n-k,0,k} \binom{k}{i_3} \stackrel{(D)}{=} 0 \\ &\Rightarrow a_{n-k,0,k} = 0, \text{ falls } k \text{ keine } p\text{-Potenz ist.} \end{aligned}$$

(b) $0 < j < n, j + k \geq 2, k \geq 1$

Betrachte $(i) = (i_1, i_2, i_3)$ mit $i_3 = 0, i_2 = j$. Es folgt:

$$a_{i,j,k} \binom{j}{j} \binom{k}{0} = a_{i,j,k} \stackrel{(D)}{=} 0 \quad \forall (i, j, k) \in I_n \text{ mit } k \geq 1, j \geq 1$$

(c) Weil wegen (A) der Koeffizient $a_{s,0,n-s} \neq 0$ ist, ist $n - s$ eine p -Potenz, etwa $n - s = p^N$.

Wenn also für ein $(i, j, k) \in I_n$ gilt, daß $a_{i,j,k} \neq 0$ ist, folgt:

$$(i, j, k) \in \{(n - p^\alpha, 0, p^\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}_0, p^\alpha \leq n - s = p^N\} \cup \{(n - j, j, 0) : j = 1, \dots, n\}$$

(14) Jetzt schlachten wir den nur von x abhängigen Teil in (C) aus:

Setze $F_{(i)} = D_{(i)} - P_{(i)}$, dann gilt:

$$(\mathbf{E}') \left\{ \begin{array}{l} \forall (i) \in I_n \setminus \{(n, 0, 0)\}, (i) = (i_1, i_2, i_3) : \\ F_{(i)}(x) = \sum_{j \geq i_2+1} a_{i,j,i_3} \binom{j}{i_2} x^{j-i_2} - \sum_{\gamma=1}^{i_2} a_{i_1, i_2-\gamma, i_3+\gamma} \binom{i_3+\gamma}{\gamma} x^\gamma = 0 \end{array} \right.$$

Für $i_2 = 0$ besteht $P_{(i)}$ aus der leeren Summe. Für $i_2 \geq 1$ ist

$$P_{(i)}(x) = a_{i_1, 0, i_2+i_3} \binom{i_2+i_3}{i_2} x^{i_2},$$

denn für $\gamma \in \{1, \dots, i_2-1\}$ ist $a_{i_1, i_2-\gamma, i_3+\gamma} = 0$, da dann $i_2 - \gamma \geq 1, i_3 + \gamma \geq 1$ ist (vgl. (13 b)).

Wir betrachten nun $F_{(i)}$ für $(i) = (n - i_2, i_2, 0)$ mit $i_2 \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$(\mathbf{E}) \quad \forall i_2 \in \{1, \dots, n-1\} : \quad F_{(i)}(x) = \sum_{j \geq i_2+1} a_{n-j, j, 0} \binom{j}{i_2} x^{j-i_2} - a_{n-i_2, 0, i_2} x^{i_2} = 0$$

(a) $i_2 = n-1$:

$F_{(i)}(x) = a_{0, n, 0} \binom{n}{1} x - a_{1, 0, n-1} x^{n-1} \stackrel{(\mathbf{E})}{=} 0$. Wegen (A) sowie $s \geq 2$ ist $a_{1, 0, n-1} = 0$, $a_{0, n, 0} \neq 0$, also gilt:

$$p \mid n$$

(b) $i_2 = 1$:

$$\begin{aligned} F_{(i)}(x) &= \sum_{j \geq 2} a_{n-j, j, 0} j x^{j-1} - a_{n-1, 0, 1} x \\ &= (2a_{n-2, 2, 0} - a_{n-1, 0, 1})x + \sum_{j \geq 3} a_{n-j, j, 0} j x^{j-1} \stackrel{(\mathbf{E})}{=} 0 \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a_{n-2, 2, 0} = a_{n-1, 0, 1} \\ \forall j \geq 3, p \nmid j : a_{n-j, j, 0} = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(c) Betrachte nun alle $a_{n-j, j, 0}$ mit $j \geq 3$, $p \mid j$:

(c1) Falls $j \neq p^\alpha, j \neq 2p^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{N}$), existiert ein $u \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ mit $j = up^\alpha$, $p \nmid u$, $\alpha \geq 1$. Für $i_2 = p^\alpha$ tritt $a_{i, j, k}$ in $F_{(i)}$ als Koeffizient (in Verbindung mit einem Binomialkoeffizienten) auf, mit (E) folgt:

$$\begin{aligned} a_{n-j, j, 0} \binom{j}{p^\alpha} &= 0, \quad \binom{j}{p^\alpha} \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ (vgl. (1j))} \\ &\Rightarrow a_{n-j, j, 0} = 0 \quad \forall j \geq 3, p \mid j, j \neq p^\alpha, j \neq 2p^\alpha \end{aligned}$$

(c2) Für $j = 2p^\alpha$ tritt $a_{i, j, k}$ in $F_{(i)}$ als Koeffizient (mit einem Binomialkoeffizienten) auf. Wenn $(i) = (n - i_2, i_2, 0)$ ist mit $1 \leq i_2 < 2p^\alpha$, findet man in Verbindung mit (E):

$$i_2 \neq p^\alpha \Rightarrow \binom{j}{i_2} \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a_{n-j, j, 0} \binom{j}{i_2} = 0$$

Für $i_2 = p^\alpha$ kommt $a_{n-j, j, 0}$ in $F_{(i)}$ doppelt vor (nämlich in $D_{(i)}$ und $C_{(i)}$). Es muß gelten:

$$\begin{aligned} a_{n-j, j, 0} \binom{j}{p^\alpha} - a_{n-p^\alpha, 0, p^\alpha} &= 0 \text{ bzw.} \\ a_{n-2p^\alpha, 2p^\alpha, 0} \binom{2p^\alpha}{p^\alpha} - a_{n-p^\alpha, 0, p^\alpha} &= 0 \quad \forall j = 2p^\alpha, \alpha \in \{1, \dots, N\} \end{aligned}$$

Wendet man die Formel $\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{r-i} \binom{n}{i}$ für Binomialkoeffizienten an mit $m = n = r = p^\alpha$, so erhält man in Verbindung mit (1j), daß $\binom{2p^\alpha}{p^\alpha} \equiv 2 \pmod{p}$ ist. Zusammen mit (14 b) gibt das:

$$a_{n-2p^\alpha, 2p^\alpha, 0} \cdot 2 = a_{n-p^\alpha, 0, p^\alpha} \quad \forall j = 2p^\alpha, \quad \alpha \in \{0, \dots, N\}$$

(15) Fassen wir die Ergebnisse aus (13) und (14) zusammen:

$$\begin{aligned} a_{i,j,k} \neq 0 \Rightarrow \quad (i, j, k) \in \quad & \{(n - p^\alpha, 0, p^\alpha) : \alpha = 0, \dots, N\} \cup \\ & \{(n - p^\alpha, p^\alpha, 0) : \alpha = 0, \dots, N\} \cup \\ & \{(n - 2p^\alpha, 2p^\alpha, 0) : \alpha = 0, \dots, N\} \\ \text{ sowie } \quad \forall \alpha \in \{0, \dots, N\} : \quad & a_{n-2p^\alpha, 2p^\alpha, 0} = \frac{1}{2} a_{n-p^\alpha, 0, p^\alpha} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F(w, x, y) &= \sum_{i=0}^N a_{i,j,k} w^i x^j y^k \\ &= \sum_{i=0}^N a_{n-p^i, 0, p^i} w^{n-p^i} y^{p^i} + \sum_{i=0}^N a_{n-p^i, p^i, 0} w^{n-p^i} x^{p^i} + \sum_{i=0}^N a_{n-2p^i, 2p^i, 0} w^{n-2p^i} x^{2p^i} \\ &= \sum_{i=0}^N a_{n-p^i, 0, p^i} w^{n-p^i} y^{p^i} + \sum_{i=0}^N a_{n-p^i, p^i, 0} w^{n-p^i} x^{p^i} + \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} a_{n-p^i, 0, p^i} w^{n-2p^i} x^{2p^i}. \end{aligned}$$

Setzen wir $a_i = a_{n-p^i, p^i, 0}$ und $b_i = a_{n-p^i, 0, p^i}$, so ist

$$F(w, x, y) = \sum_{i=0}^N a_i w^{n-p^i} x^{p^i} + \sum_{i=0}^N b_i w^{n-p^i} y^{p^i} + \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} b_i w^{n-2p^i} x^{2p^i}.$$

Jetzt sind wir mit Teil (I) des Satzes fast fertig. Wir müssen nur noch prüfen, ob die Kurve den Grad $n = 2p^N$ hat und der Definition 15 entspricht.

Für $n > 2p^N$ folgt $w|F$, also ist $6 \leq n = 2p^N$. Jetzt formen wir F ein wenig um:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N \left(a_i w^{2p^N-p^i} x^{p^i} + b_i w^{2p^N-p^i} y^{p^i} + \frac{1}{2} b_i w^{2p^N-2p^i} x^{2p^i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^N \left(\sqrt[p^i]{a_i} w x + \sqrt[p^i]{b_i} w y + \frac{1}{2} \sqrt[p^i]{b_i} x^2 \right)^{p^i} w^{2p^N-2p^i} \end{aligned}$$

Setzen wir $F_i(w, x, y) = \sqrt[p^i]{a_i} w x + \sqrt[p^i]{b_i} w y + \frac{1}{2} \sqrt[p^i]{b_i} x^2$ und $\alpha_i = \sqrt[p^i]{a_i}$, $\beta_i = \sqrt[p^i]{b_i}$, so ist

$$F(w, x, y) = \sum_{i=0}^N (w^2)^{p^N-p^i} F_i^{p^i}.$$

Wegen (1a) und (A) gilt: $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0, 0)$, $\beta_N \neq 0$. Nehmen wir nun an, für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$ gilt: $(\sqrt[p^i]{a_i}, \sqrt[p^i]{b_i}) \equiv (a_0, b_0)$. Das impliziert:

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \exists c_i \in \mathbb{L} \text{ mit } (\sqrt[p^i]{a_i}, \sqrt[p^i]{b_i}) = (c_i a_0, c_i b_0),$$

also $F_i = c_i F_0$, und weiter

$$F = \sum_{i=0}^N (w^2)^{p^N-p^i} c_i^{p^i} F_0^{p^i}.$$

Nun substituieren wir $w^2 = t, F_0 = r$. Der Ausdruck $\sum c_i^{p^i} t^{p^N - p^i} r^{p^i}$ ist homogen vom Grad p^N und faktorisiert zu

$$\prod_{i=1}^{p^N} (u_i t + v_i r), \quad (u_i, v_i) \in \mathbb{L}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

rücksubstituiert ist dann

$$F = \prod_{i=1}^{p^N} (u_i w^2 + v_i F_0).$$

Da es sich bei der Gleichung $u_i w^2 + v_i F_0$ um die Gleichung eines (eventuell entarteten) Kegelschnittes handelt, ist F reduzibel, im Widerspruch zur Irreduzibilität von C . Also ist (I) gezeigt.

(16) Nun wird gezeigt, daß Γ_C ein semidirektes Produkt $\Gamma_C = V \rtimes Z$ ist, wobei V der Normalteiler von endlichem Index aus (8) ist und Z isomorph zu einer endlichen Gruppe, die von Diagonalmatrizen repräsentiert wird.

Es sei $F(w, x, y) = \sum_{i=0}^N (w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) + \frac{1}{2} b_i w^{n-2p^i} x^{2p^i})$ und die Nullstellenmenge C von F sei eine irreduzible KV-Kurve vom Grad $n = 2p^N$ mit Stabilisator Γ_C . Daß tatsächlich jede Kollineation, die von einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) \text{ mit } (1 : a : b) \in C$$

induziert wird, die Kurve C invariant läßt, bestätigt man leicht durch Nachrechnen.

Daß $[\Gamma_C : V] < \infty$ ist, folgt aus (8) und (5) wegen $[U : V] < \infty, [\Gamma_C : U] < \infty$.

Für die Koeffizienten von F gilt (vgl. Definition 15, S.118):

$$a_i = \alpha_i^{p^i}, \quad b_i = \beta_i^{p^i}, \quad \beta_N \neq 0$$

Falls $\alpha_N \neq 0$ ist, betrachte man statt C, F, V und Γ_C die Objekte $C^\alpha, F^\alpha, V^\alpha$ und Γ_{C^α} , wobei α induziert werde von der Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_N}{\beta_N} & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist dann nämlich $F^\alpha = F \circ A^{-1}$ mit $F^\alpha(w, x, y) = \sum_{i=0}^N (w^{n-p^i} (a'_i x^{p^i} + b'_i y^{p^i}) + \frac{1}{2} b'_i w^{n-2p^i} x^{2p^i})$ mit $a'_i = a_i - b_i \frac{\alpha_N}{\beta_N}, b'_i = b_i \forall i = 0, \dots, N$, also $a'_N = 0, b'_N \neq 0$. Weiter wird V^α induziert von allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}), \quad (1 : a : b) \in C^\alpha.$$

Deshalb kann man für das Polynom F oBdA. annehmen, daß $a_N = 0$ ist.

Jedes Element $\gamma' \in \Gamma_C$ muß die Singularität $(0 : 0 : 1)$ von C mitsamt ihrer Tangente $[\infty]$ festlassen, also wird γ' induziert von einer Matrix B der Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ b & d & e \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}).$$

Wegen $(1 : 0 : 0) \in C$ folgt $(1 : a : b) \in C$. Die Matrix A mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ b & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & ac+d & e \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & f & e \end{pmatrix} =: A^{-1}$$

induziert dann eine Kollineation $\gamma \in \Gamma_C$. Betrachte nun das Polynom $F \circ A^{-1}$. Wegen $\gamma \in \Gamma_C$ existiert ein $t \in \mathbb{L}_*$ mit $F \circ A^{-1} = tF$. Rechnet man das – unter Verwendung von $a_N = 0$ – aus und macht einen Koeffizientenvergleich, so erhält man:

$$f = 0, \quad e = c^2.$$

Dann ist, da die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : c \in \mathbb{L}_* \right\}$$

der Normalteiler einer Buekenhoutgruppe ist (vgl. Definition 8, S.74, in Verbindung mit Hilfssatz 19, S.75), die Menge aller Kollineationen aus Γ_C , die von solchen Matrizen induziert werden, endlich. Sonst hätte nämlich C mit einem Kegelschnitt unendlich viele Punkte gemeinsam, was wegen der Irreduzibilität von C dem Satz von Bézout widerspräche. Es ergibt sich weiter, daß eine Kollineation $\gamma \in \Gamma_C \setminus V$ induziert wird von einer Matrix B mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ b & -ac & c^2 \end{pmatrix}, \quad (1 : a : b) \in C.$$

Wegen

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & -x & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{x}{c} & 1 & 0 \\ \frac{y}{c^2} & -\frac{x}{c} & 1 \end{pmatrix}$$

sowie $(1 : \frac{x}{c} : \frac{y}{c^2}) \in C$ für alle $(1 : x : y) \in C$ ist schließlich $V \triangleleft \Gamma_C$.

Insgesamt ist – wenn oBdA. $a_N = 0$ ist – die volle Kollineationsgruppe unserer Kurve gegeben durch $\Gamma_C = V \rtimes Z_C$, wobei Z_C induziert wird von $Z'_C \leq GL_3(\mathbb{L})$ mit

$$Z'_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : c \in M \right\},$$

M eine durch die Koeffizienten von F eindeutig bestimmte endliche multiplikative Untergruppe von \mathbb{L}_* . □

Wir fassen abschließend den Inhalt der letzten Hilfssätze noch einmal zusammen.

SATZ 29 *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$ und C eine singuläre irreduzible algebraische Kurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$. Wenn die Kollineationsgruppe Γ_C von C in der $PGL_3(\mathbb{L})$ eine unendliche Gruppe ist, gilt:*

(I) *Für $\text{char}\mathbb{L} = 0$ ist C eine VP-Kurve.*

(II) *Für $\text{char}\mathbb{L} \neq 0$ ist C eine VP-Kurve, eine Translationskurve oder eine KV-Kurve.*

2.3.2 Der gemeinsame Stabilisator mehrerer Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper

Nachdem nun die singulären Kurven mit unendlicher Kollineationsgruppe bekannt sind, wird in diesem Abschnitt untersucht, wann der gemeinsame Stabilisator mehrerer singulärer Kurven eine unendliche Gruppe ist. Es ist klar, daß in diesem Fall diese Kurven projektiv äquivalent sein müssen, da die jeweiligen Kollineationsgruppen von verallgemeinerten Parabeln, Translationskurven und VP-Kurven nicht zueinander isomorph sind.

Für die verallgemeinerten Parabeln, die wir zuerst betrachten, erhält man ein ähnliches Ergebnis wie für die Kegelschnitte.

HILFSSATZ 30 (VP-Kurven mit unendlichem gemeinsamen Stabilisator) *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$ und C_0 die irreduzible VP-Kurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die oBdA. die Nullstellenmenge des Polynoms $F_0(w, x, y) = w^{n-k}y^k - x^n \in \mathbb{L}[w, x, y]$ ist. Es sei I eine Indexmenge mit $0 \in I$, $|I| \geq 2$ und $\mathcal{C} := \{C_i : i \in I\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen projektiv äquivalenten Kurven in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die C_0 enthält. Die Gruppe Γ_i sei der Stabilisator von C_i in der $PGL_3(\mathbb{L})$ und $\Gamma_{\mathcal{C}} := \bigcap_{i \in I} \Gamma_i$.*

Wenn $|\Gamma_{\mathcal{C}}| = \infty$ ist, gilt:

(I) *Ist C_0 eine Translationskurve, also $C_0 = C_{n,1}$ mit $n = p^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und $\text{char } \mathbb{L} = p$ (vgl. Definition 13, S. 97), so liegt – bis auf projektive Äquivalenz – einer der folgenden Fälle vor:*

(Ia) *Die Menge \mathcal{C} ist enthalten in der Kurvenschar*

$$\mathcal{C}_m := \left\{ C(a) := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : w^{p^N-1}y = ax^{p^N}\} : a \in \mathbb{L}_* \right\}$$

und $\Gamma_{\mathcal{C}}$ ist gleich dem Schnitt der Stabilisatoren aller Kurven aus \mathcal{C}_m . Die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ wird von \mathcal{C}_m bis auf das Einheitsdreieck einfach überdeckt. Die Gruppe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ wird induziert von allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{p^N} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{L}_*.$$

(Ib) *Die Menge \mathcal{C} ist enthalten in der Kurvenschar*

$$\mathcal{C}_m := \left\{ C(a) := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : w^{p^N-1}y = x^{p^N} + aw^{p^N}\} : a \in \mathbb{L} \right\}$$

und $\Gamma_{\mathcal{C}}$ ist gleich dem Schnitt der Stabilisatoren aller Kurven aus \mathcal{C}_m . Die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ wird von \mathcal{C}_m bis auf die Gerade $[\infty]$ einfach überdeckt. Die Gruppe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ wird induziert von allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ r^{p^N} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{L}.$$

(II) *Ist $C_0 = C_{n,k}$ eine VP-Kurve, die keine Translationskurve ist, so ist \mathcal{C} enthalten in der Kurvenschar $\mathcal{C}_m = \{C(a) = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : w^{n-k}y^k = ax^n\} : a \in \mathbb{L}_*\}$ und $\Gamma_{\mathcal{C}}$ ist gleich dem Schnitt der Stabilisatoren aller Kurven aus \mathcal{C}_m . Die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ wird von \mathcal{C}_m bis auf das Einheitsdreieck einfach überdeckt. Die Gruppe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ wird induziert von allen Matrizen der Form*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^k & 0 \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{L}_*.$$

Insbesondere ist $\Gamma_{\mathcal{C}} = \Gamma_0$.

Beweis:

(1) Wir zeigen zuerst (II). Es sei $C_0 = C_{n,k}$ (keine Translationskurve) mit Kollineationsgruppe Γ_0 und $P = (w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ ein Punkt, der nicht auf dem Einheitsdreieck liegt, d.h. oBdA. $w = 1$, $xy \neq 0$. Weiter sei J eine Indexmenge, so daß $\{\gamma_j : j \in J\} \subseteq \Gamma_0$ eine unendliche Teilmenge paarweise verschiedener Kollineationen aus Γ_0 ist. Jede Kollineation γ_j wird dann induziert von einer Matrix A_j mit

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_j^k & 0 \\ 0 & 0 & t_j^n \end{pmatrix}, \quad t_j \in \mathbb{L}_* \text{ (vgl. Hilfssatz 24, S.97).}$$

Für $a \in \mathbb{L}_*$ sei außerdem $C(a) := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : w^{n-k}y^k = ax^n\}$. Trivialerweise existiert genau ein $a \in \mathbb{L}_*$ mit $P \in C(a)$, d.h. $y^k = ax^n$. Wegen

$$A_j \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t_j^k x \\ t_j^n y \end{pmatrix}$$

ist $\{P^{\gamma_j} : j \in J\} = \{P_j := (1 : t_j^k x : t_j^n y) : j \in J\}$ eine unendliche Menge von Punkten, die wegen $(t_j^n y)^k = a(t_j^k x)^n$ in $C(a)$ enthalten ist.

Es sei nun C_i eine von C_0 verschiedene Kurve aus \mathcal{C} . Es existiert sicher ein Punkt Q auf C_i , der mit keiner der Geraden $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ und $[0 : 0 : 1]$ inzidiert. Außerdem existiert genau ein $a \in \mathbb{L}_*$, so daß $Q \in C(a)$ ist. Wegen $|\Gamma_i \cap \Gamma_0| = \infty$ hat C_i mit $C(a)$ unendlich viele Punkte gemeinsam, also ist $C_i = C(a)$. Aus obiger Rechnung folgt, daß $\mathcal{C}_m := \{C(a) : a \in \mathbb{L}_*\}$ die Ebene ohne das Einheitsdreieck einfach überdeckt und andererseits die Gruppe Γ_0 jede Kurve $C(a)$ festläßt, also ist (II) bewiesen.

(2) Nun betrachten wir den Fall $C_0 = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : w^{p^N-1}y = x^{p^N}\}$ für $\text{char}\mathbb{L} = p$.

Es sei $C_i \neq C_0$ eine Kurve aus \mathcal{C} und $\Gamma = \Gamma_i \cap \Gamma_0$. Wegen $\Gamma_{\mathcal{C}} \geq \Gamma \geq \Gamma_0$ ist $|\Gamma| = \infty$. Die (endliche) Menge der Schnittpunkte $\Omega := C_i \cap C_0 \neq \emptyset$ kann Punkte außerhalb der Geraden $[\infty]$ enthalten oder nicht.

(2a) Es sei $\emptyset \neq \Omega_*$ die Menge der Schnittpunkte von $C_i \cap C_0$, die nicht auf $[\infty]$ liegen. Dann liegt bis auf projektive Äquivalenz der Fall (Ia) vor:

Die Gruppe Γ operiert auf Ω_* und hat deshalb einen Normalteiler M von endlichem Index, der Ω_* punktweise festläßt. Da Γ_0 auf $C_0 \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ transitiv wirkt, kann man annehmen, daß $S := (1 : 0 : 0)$ in Ω_* enthalten ist. Dann wird (vgl. Satz 24) M induziert von einer unendlichen Teilmenge der Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{p^N} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : t \in \mathbb{L}_* \right\} \leq GL_3(\mathbb{L}).$$

Da Elemente aus M außerhalb von $[\infty]$ nur den Punkt $(1 : 0 : 0)$ festlassen, ist $\Omega_* = \{(1 : 0 : 0)\}$ und damit $M = \Gamma$. Die restlichen Aussagen von (Ia) können wie in (1) gezeigt werden.

(2b) Wenn $\Omega \subseteq [\infty]$ ist, ist $\Omega = \{(0 : 0 : 1)\}$, da C_0 auf $[\infty]$ nur diesen einen Punkt besitzt. Dann liegt der Fall (Ib) vor:

Es sei $C_i = C_0^\alpha$ für eine Kollineation $\alpha \in PGL_3(\mathbb{L}) \setminus \Gamma_0$ und weiter $P = (0 : 1 : 0)$ der Knoten von C_0 . Der Knoten P^α von C_i muß auf $[\infty]$ liegen:

Angenommen, $P^\alpha \notin [\infty]$. Dann wäre $\gamma(P^\alpha) = P^\alpha \notin [\infty] \forall \gamma \in \Gamma$ wegen $\Gamma = \Gamma_0 \cap (\Gamma_0)^\alpha$. Wird $\gamma \in \Gamma_0$ von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & t & 0 \\ r^{p^N} & 0 & t^{p^N} \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{L}, \quad t \in \mathbb{L}_*$$

induziert und hat einen Fixpunkt außerhalb von $[\infty]$, so ist dieser gleich $\left(1 : \frac{r}{1-t} : \left(\frac{r}{1-t}\right)^{p^N}\right)$ mit $t \neq 1$, d.h. der Fixpunkt liegt auf C_0 . Da Γ_0 transitiv auf $C_0 \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ operiert, kann man oBdA. $P^\alpha = (1 : 0 : 0)$ annehmen. Dann ist aber Γ eine Untergruppe des Stabilisators des Einheitsdreiecks Δ wie in (2a). Da die Punktebahnen dieser Gruppe die Kurven aus \mathcal{C}_m wie in (1a) bilden, ist das ein Widerspruch zur Voraussetzung $\Omega \subset [\infty]$. Also ist $P^\alpha \in [\infty]$.

Es muß $P^\alpha = P$ sein:

Angenommen, $P^\alpha \neq P$, d.h. $P^\alpha = (0 : 1 : y)$ für ein $y \in \mathbb{L}_*$. Es folgt, daß die Kollineation α induziert wird von einer Matrix $A \in GL_3(\mathbb{L})$ mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ f & h & 0 \\ g & l & 1 \end{pmatrix}, \quad ahl \neq 0.$$

Die Kurve $C_i = C_0^\alpha$ ist dann die Nullstellenmenge des Polynoms $F^\alpha = F \circ A^{-1}$ mit $F \circ A^{-1}(w, x, y) = (a^{p^N-1}g - f^{p^N})w^{p^N} + a^{p^N-1}w^{p^N-1}y + a^{p^N-1}lw^{p^N-1}x - h^{p^N}x^{p^N}$. Dann haben aber C_0 und C_i einen Schnittpunkt außerhalb von $[\infty]$, denn $F^\alpha(1, x, x^{p^N}) = (a^{p^N-1} - h^{p^N})x^{p^N} + a^{p^N-1}lx + (a^{p^N-1}g - f^{p^N})$ ist kein konstantes Polynom wegen $al \neq 0$. Widerspruch.

Die Kollineation α fixiert also die Punkte $(0 : 1 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ und wird damit induziert von einer Matrix $A \in GL_3(\mathbb{L})$ mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & c & 0 \\ b & 0 & d \end{pmatrix}, \quad cd \neq 0, \quad b \neq e^{p^N} \text{ oder } c \neq c^{p^N}.$$

Die Kurve $C_0^\alpha = C_i$ ist dann die Nullstellenmenge von $F^\alpha = F \circ A^{-1}$ mit

$$F \circ A^{-1}(w, x, y) = (b - e^{p^N})w^{p^N} + dw^{p^N-1}y - c^{p^N}x^{p^N}.$$

Wegen $C_0 \cap C_i = \{(0 : 0 : 1)\}$ folgt weiter $F^\alpha(1, x, x^{p^N}) = (d - c^{p^N})x^{p^N} + (b - e^{p^N}) \neq 0 \forall x \in \mathbb{L}$. Das impliziert $d = c^{p^N}$, $b - e^{p^N} \neq 0$. Deshalb ist C_i dann die Nullstellenmenge des Polynoms

$$F_i(w, x, y) = w^{p^N-1}y - x^{p^N} - a_0w^{p^N}, \quad a_0 = \frac{e^{p^N} - b}{d}.$$

Die Gruppe $\Gamma_i = \Gamma_0^\alpha$ wird induziert von allen Matrizen der Form AMA^{-1} mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & c & 0 \\ b & 0 & c^{p^N} \end{pmatrix}, \quad M \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & t & 0 \\ r^{p^N} & 0 & t^{p^N} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : r \in \mathbb{L}, t \in \mathbb{L}_* \right\},$$

$$AMA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c}(e(t-1) + r) & t & 0 \\ \frac{1}{c^{p^N}}(b(t^{p^N} - 1) + r^{p^N}) & 0 & t^{p^N} \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix AMA^{-1} induziert genau dann ein Element aus Γ , wenn $b(t^{p^N} - 1) + r^{p^N} = (e(t-1) + r)^{p^N}$ ist, also $(b - e^{p^N})(t^{p^N} - 1) = 0$. Weil $b \neq e^{p^N}$ war, folgt $t = 1$, also wird Γ induziert von allen

Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ r^{p^N} & 0 & 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{L}.$$

Für $a \in \mathbb{L}$ setze man nun $C(a) = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : w^{p^N-1}y = x^{p^N} + aw^{p^N}\}$ und betrachte einen Punkt $P = (1 : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$. Es existiert genau ein $a \in \mathbb{L}$ mit $P \in C(a)$, d.h. $y = x^{p^N} + a$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ r^{p^N} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^{p^N} + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ r + x \\ (r + x)^{p^N} + a \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{L}$$

läßt Γ jede Kurve $C(a)$ fest. Damit ist (Ib) gezeigt. \square

Nun betrachten wir Translationskurven. Auch hier sind zwei oder mehr projektiv äquivalente Kurven mit unendlichem gemeinsamen Stabilisator Teil einer Kurvenschar, die $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ bis auf eine Gerade einfach überdeckt.

HILFSSATZ 31 (Translationskurven mit unendlichem gemeinsamen Stabilisator) *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper von endlicher ungerader Charakteristik p und C_0 eine irreduzible Translationskurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die keine VP-Kurve ist. OBdA. sei C_0 die Nullstellenmenge eines Polynoms $F_0 \in \mathbb{L}[w, x, y]$ wie in Definition 14 vom Grad n . Es sei I eine Indexmenge mit $0 \in I$, $|I| \geq 2$ und $\mathcal{C} := \{C_i : i \in I\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen projektiv äquivalenten Kurven in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die C_0 enthält. Die Gruppe Γ_i sei der Stabilisator von C_i in der $PGL_3(\mathbb{L})$ und $\Gamma_{\mathcal{C}} := \bigcap_{i \in I} \Gamma_i$.*

Wenn $|\Gamma_{\mathcal{C}}| = \infty$ ist, ist die Menge \mathcal{C} enthalten in der Kurvenschar

$$\mathcal{C}_m := \{C(a) := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : aw^n + F_0(w, x, y) = 0\} : a \in \mathbb{L}\}$$

und $\Gamma_{\mathcal{C}}$ ist gleich dem Schnitt der Stabilisatoren aller Kurven aus \mathcal{C}_m . Die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ wird von \mathcal{C}_m bis auf die Gerade $[\infty]$ einfach überdeckt. Die Gruppe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ wird induziert von allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}), (1 : r : s) \in C_0.$$

Beweis:

(1) Dem Hilfssatz 25 entnimmt man, daß oBdA. $\Gamma_0 = V \rtimes Z$ ist. Dabei wird der Normalteiler V induziert von

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : r : s) \in C_0 \right\}.$$

Die Gruppe Z ist eine endliche Teilmenge des Stabilisators des Einheitsdreiecks: Es existiert ein durch C_0 eindeutig bestimmter endlicher Teilkörper \mathbb{F} von \mathbb{L} und ein $t \in \{1, \dots, N\}$ mit $Z = \{z(\lambda) : \lambda \in \mathbb{F}^*\}$, wobei jede Kollineation $z(\lambda) \in Z$ induziert wird von der Matrix $z'(\lambda)$ mit

$$z'(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{p^t} \end{pmatrix}.$$

(2) Wir zeigen: Für $C_i \in \mathcal{C}$ mit $C_i \neq C_0$ ist $|V \cap \Gamma_i| = \infty$.

Es sei $C_i \in \mathcal{C}$ verschieden von C_0 . Dann existiert eine Kollineation $\alpha \in PGL_3(\mathbb{L})$ mit $C_i = C_0^\alpha$ und

$\Gamma_i = \Gamma_0^\alpha$. Wegen $\Gamma_i \cap \Gamma_0 := \Gamma \leq \Gamma_C$ und $|\Gamma_C| = \infty$ kann Γ nicht endlich sein. Weil $\Gamma_0 = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{F}_*} Vz(\lambda)$ ist, existiert ein $\lambda \in \mathbb{F}_*$ mit $|\Gamma \cap Vz(\lambda)| = \infty$. Es sei $\Gamma \cap Vz(\lambda) = \{v_j z(\lambda) \in \Gamma_0 : j \in J\}$ mit unendlich vielen paarweise verschiedenen $v_j \in V$ für eine geeignete Indexmenge J . Für ein $j_0 \in J$ sei $v_{j_0} z(\lambda) \in \Gamma \cap Vz(\lambda)$. Die Menge $\{v_j z(\lambda)(v_{j_0} z(\lambda))^{-1} : j \in J\} = \{v_j v_{j_0}^{-1} : j \in J\}$ ist dann von unendlicher Mächtigkeit und in V enthalten. Also ist $V \cap \Gamma_i = V \cap \Gamma$ eine unendliche Gruppe.

(3) Wir zeigen: Jede Kurve $C_i \in \mathcal{C}$ ist enthalten in \mathcal{C}_m und für alle $\gamma \in V$, $a \in \mathbb{L}$ gilt: $(C(a))^\gamma = C(a)$.

Es ist für $a \in \mathbb{L}$ die Kurve $C(a)$ gleich der Nullstellenmenge des Polynoms $F_a \in \mathbb{L}[w, x, y]$ mit $F_a(w, x, y) = aw^n + F_0(w, x, y)$. Man rechnet leicht nach, daß $\mathcal{C}_m = \{C(a) : a \in \mathbb{L}\}$ die Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ ohne $[\infty]$ einfach überdeckt und $C(a)^\gamma = C(a)$ ist für alle $\gamma \in V$. Für eine Kurve $C_i \in \mathcal{C}$ und einen Punkt $P = (1 : x : y) \in C_i = C_0^\alpha$ existiert dann genau ein $a \in \mathbb{L}$ mit $P \in C(a)$, weiter ist für jede unendliche Teilmenge W von V die Bahn P^W von unendlicher Mächtigkeit und in $C(a)$ enthalten. Also ist $C_i = C(a)$ und damit $\Gamma_C \geq V$.

(4) Es ist $\Gamma = V$ und deshalb $\Gamma_C = V$.

Angenommen, es existiert ein $\gamma \in \Gamma \setminus V$. Dann existiert ein $v \in V$ und ein $\lambda \in \mathbb{F}_* \setminus \{1\}$ mit $\gamma = vz(\lambda)$. Wegen $V \leq \Gamma$ ist die Kollineation $z(\lambda)$ ebenfalls in Γ enthalten. Es sei $z'(\lambda)$ die Matrix von $z(\lambda)$. Wenn man nun $F_a \circ (z'(\lambda))^{-1}$ explizit berechnet, so erhält man, im Widerspruch zur Annahme:

$$F_a \circ (z'(\lambda))^{-1} \equiv F_a \iff \lambda^{p^t} = 1 \iff \lambda = 1$$

□

Es sind nun noch die KV-Kurven zu betrachten.

HILFSSATZ 32 (KV-Kurven mit unendlichem gemeinsamen Stabilisator) *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper von endlicher ungerader Charakteristik p und C_0 eine irreduzible KV-Kurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$. OBdA. sei C_0 die Nullstellenmenge eines Polynoms $F_0 \in \mathbb{L}[w, x, y]$ wie in Definition 15 vom Grad n . Es sei I eine Indexmenge mit $0 \in I$, $|I| \geq 2$ und $\mathcal{C} := \{C_i : i \in I\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen projektiv äquivalenten Kurven in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die C_0 enthält. Die Gruppe Γ_i sei der Stabilisator von C_i in der $PGL_3(\mathbb{L})$ und $\Gamma_C := \bigcap_{i \in I} \Gamma_i$.*

Wenn $|\Gamma_C| = \infty$ ist, ist die Menge \mathcal{C} enthalten in der Kurvenschar

$$\mathcal{C}_m := \{K(a) := \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : aw^n + F_0(w, x, y) = 0\} \mid a \in \mathbb{L}\}$$

und Γ_C ist gleich dem Schnitt der Stabilisatoren aller Kurven aus \mathcal{C}_m . Die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ wird von \mathcal{C}_m bis auf die Gerade $[\infty]$ einfach überdeckt. Die Gruppe Γ_C wird induziert von allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ s & -r & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}), \quad (1 : r : s) \in C_0.$$

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zum Beweis des letzten Hilssatzes, wobei man für $\Gamma_0 = V \rtimes Z$ den Hilfssatz 28 heranziehe. Wir führen hier nur die dem Teil (4) des Beweises des letzten Hilssatzes entsprechende Rechnung aus. Dazu nehmen wir an, daß $F_0(w, x, y) = \sum_{i=0}^N w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) + \frac{1}{2} w^{n-2p^i} x^{2p^i}$ ist und oBdA. $(a_N, b_N) \equiv (0, 1)$. Dann ist zu zeigen, daß für

$$z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

mit $c \neq 1$ sowie $F_0 \circ z' \equiv F_0$ gilt:

$$F_a \circ z' \not\equiv F_a \quad \forall a \in \mathbb{L}_*$$

Es ist $F_0 \circ z'(w, x, y) = c^{2p^N} F_0(w, x, y)$ und $F_a \circ z'(w, x, y) = aw^n + c^{2p^n} F_0(w, x, y)$. Andererseits folgt aus $F_a \circ z' \equiv F_a$, daß $c^{2p^N} = 1$ ist, also $c^2 = 1$. Wegen $c \neq 1$ muß dann $c = -1$ sein. Wenn aber $F_0 \circ z'(w, x, y) = F_0(w, -x, y) = F_0(w, x, y)$ gilt, folgt:

$$\forall i = 0, \dots, N : \quad a_i = 0$$

Dann ist aber F_0 reduzibel (vgl. Definition 15 mit $a_i = \alpha^{p^i}$, $b_i = \beta_i^{p^i}$), Widerspruch. \square

2.3.3 Kurven mit unendlichem Stabilisator über unendlichen Körpern

Nun werden algebraische Kurven vom Grad ≥ 3 mit unendlicher Kollineationsgruppe über beliebigen unendlichen Körpern \mathbb{K} der Charakteristik $\neq 2$ betrachtet. Wie nicht anders zu erwarten, sind die Aussagen hier weniger stark als im algebraischen Abschluß \mathbb{L} von \mathbb{K} .

Wie bereits zu Anfang des Kapitels 2 (S. 71) erwähnt, verstehen wir unter einer algebraischen Kurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ unter der zusätzlichen Bedingung, daß die Kurve unendlich viele Punkte besitzt. Bei der Lösung der Frage, welche Kurven hier eine unendliche Kollineationsgruppe in der $PGL_3(\mathbb{K})$ haben können, verwenden wir natürlich die Ergebnisse des Abschnitts 2.3.1, indem wir die Situation kanonisch in den algebraischen Abschluß \mathbb{L} von \mathbb{K} einbetten. Es gibt dabei im Prinzip zwei verschiedene Blickwinkel, die man einnehmen kann:

Man kann einerseits ausgehen von einer oBdA. irreduziblen Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ mit unendlicher Kollineationsgruppe $\Gamma_C \leq PGL_3(\mathbb{L})$, d.h. C hat mindestens eine Singularität (vgl. Satz 23, S. 94) und ist eine der Kurven aus Satz 29, S. 131. Außerdem setzt man voraus, daß $|C \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty$ und $|\Gamma_C \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$ gilt. Man sagt dann auch, C hat unendlich viele \mathbb{K} -rationale Punkte und Γ_C hat unendlich viele \mathbb{K} -rationale Kollineationen.

Andererseits kann man auch von einer Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit Stabilisator $G_C \leq PGL_3(\mathbb{K})$ ausgehen, gegeben durch ein oBdA. in $\mathbb{K}[w, x, y]$ irreduzibles Polynom $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$. Dann kann man $C^a = \{(w : x : y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : F(w, x, y) = 0\}$ und die zugehörige Kollineationsgruppe $\Gamma_{C^a} \leq PGL_3(\mathbb{L})$ betrachten, wobei $\Gamma_{C^a} \cap PGL_3(\mathbb{K})$ mit G_C identifiziert wird.

Welchen Blickwinkel man einnimmt, ist irrelevant, wie man sich leicht überlegt:

Hat eine über \mathbb{L} irreduzible Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ unendlich viele \mathbb{K} -rationale Punkte, so kann man nachweisen, daß die Kurve die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms $F \in \mathbb{L}[w, x, y]$ ist, dessen Koeffizienten oBdA. Elemente von \mathbb{K} sind. Geht man andererseits von einer Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ aus, die die Nullstellenmenge des oBdA. in $\mathbb{K}[w, x, y]$ irreduziblen⁷ Polynoms $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ ist und betrachtet $C^a = \{(w, x, y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : F(w, x, y) = 0\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, so muß F auch in $\mathbb{L}[w, x, y]$ irreduzibel sein. Denn angenommen, F ist irreduzibel über \mathbb{K} und reduzibel über \mathbb{L} , etwa $F = G \cdot H$, für zwei nichtkonstante homogene Polynome G, H aus $\mathbb{L}[w, x, y]$, so daß multiplikative Vielfache von G bzw. H nicht in $\mathbb{K}[w, x, y]$ enthalten sind.

Dann haben die zugehörigen Kurven $C_G^a, C_H^a \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ nur endlich viele \mathbb{K} -rationale Punkte, und wegen $C^a = C_G^a \cup C_H^a$ wäre $|C|$ endlich.

⁷Ist F reduzibel über \mathbb{K} , so faktorisiert F in (über \mathbb{K}) irreduzible Faktoren $F = \prod_{i=1}^m G_i^{r_i}$, $m \in \mathbb{N}$, $r_i \in \mathbb{N}$. Man argumentiere nun wie auf Seite 71 und verwende dabei den Normalteiler N von G_C , der jede Komponente von C einzeln festläßt. Ist die Nullstellenmenge eines der G_i in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ leer, so betrachte man $\frac{F}{G_i}$ statt F .

Wenn also eine über \mathbb{K} definierte irreduzible Kurve unendlich viele Punkte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und unendlich viele Kollineationen in $PGL_3(\mathbb{K})$ hat, ist die Kurve die Menge der \mathbb{K} -rationalen Punkte einer über \mathbb{L} gegebenen und über \mathbb{L} irreduziblen Kurve C' und C' ist eine der Kurven aus Satz 29. Das heißt, es existiert eine Kollineation $\alpha \in PGL_3(\mathbb{L})$ und eine Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, so daß $C^\alpha = C'$ ist und C die Nullstellenmenge eines Polynoms wie in Definition 13, 14 oder 15. Die Kurve $C^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})$ nennen wir VP-Kurve, Translationskurve oder KV-Kurve, wenn $|C^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$ ist und C^α in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ eine VP-, Translations- oder KV-Kurve ist.

Liegt eine Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ als Nullstellenmenge eines Polynoms wie in einer dieser Definitionen vor, so sprechen wir von Kurven bzw. Polynomen in Normalform. Gekennzeichnet ist eine Normalform hauptsächlich dadurch, daß die Singularität(en) und eventuell der Knoten der Kurve Ecken des Einheitsdreiecks sind, also insbesondere in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ liegen. Weiter ist eine Tangente an eine Singularität dann eine \mathbb{K} -rationale Gerade, und zwar eine Kante des Einheitsdreiecks. Singularitäten, Knoten und Singularitätentangenten von $C^\alpha = C'$ müssen nicht a priori \mathbb{K} -rational sein, es stellt sich also die Frage nach geeigneten Normalformen für C' .

Der Inhalt der folgenden Sätze ist es, möglichst günstige Normalformen über \mathbb{K} für C' zu finden, also Kollineationen $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$, so daß $(C')^\beta$ die Nullstellenmenge eines möglichst einfachen Polynoms ist. Für $\text{char}\mathbb{K} = 0$ oder perfekte Körper mit $\text{char}\mathbb{K} = p$ gelingt es, genauso schöne Normalformen wie über \mathbb{L} zu erhalten. Für nicht perfekte Körper der Charakteristik $p \geq 3$ geht das leider nicht immer, hier kann es z.B. passieren, daß eine Singularität von C' in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L}) \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ liegt.

Auf die Betrachtung von mehreren Kurven über \mathbb{K} mit unendlichem gemeinsamen Stabilisator verzichten wir hier, denn die entsprechenden Fragen sind mit den Ergebnissen aus Kapitel 2.3.2, kombiniert mit den folgenden Hilfssätzen, leicht zu beantworten.

Wir betrachten zuerst KV-Kurven über \mathbb{K} .

HILFSSATZ 33 (Normalformen für KV-Kurven) *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper von endlicher ungerader Charakteristik p und \mathbb{K} ein unendlicher Teilkörper von \mathbb{L} . Es sei C eine irreduzible KV-Kurve vom Grad n in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ mit Stabilisator $\Gamma_C \leq PGL_3(\mathbb{L})$, dabei sei $oBdA$. C die Nullstellenmenge des Polynoms $G \in \mathbb{L}[w, x, y]$ mit $G(w, x, y) = \sum_{i=0}^N w^{n-p^i} (c_i x^{p^i} + d_i y^{p^i}) + \frac{1}{2} d_i w^{n-2p^i} x^{2p^i}$, $n = 2p^N$ (vgl. Definition 15). Für eine Kollineation $\alpha \in PGL_3(\mathbb{L})$ sei*

$$|C^\alpha \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty, |(\Gamma_C)^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty.$$

Dann gilt:

(I) *Ist \mathbb{K} ein perfekter Körper der Charakteristik 3 oder aber $\text{char}\mathbb{K} \neq 3$, so existiert eine Kollineation $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$, so daß die Kurve $(C^\alpha)^\beta$ die Nullstellenmenge eines Polynoms $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ ist mit $F(w, x, y) = \sum_{i=0}^N w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) + \frac{1}{2} b_i w^{n-2p^i} x^{2p^i}$.*

(II) *Ist $\text{char}\mathbb{K} = 3$ und \mathbb{K} nicht perfekt, so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

(IIa) *Es existiert eine Kollineation $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$, so daß die Kurve $(C^\alpha)^\beta$ die Nullstellenmenge eines Polynoms $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ ist mit*

$$F(w, x, y) = \sum_{i=0}^N w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) + \frac{1}{2} b_i w^{n-2p^i} x^{2p^i}.$$

(IIb) Es existiert eine rein inseparable Körpererweiterung \mathbb{K}' von \mathbb{K} mit $[\mathbb{K}' : \mathbb{K}] = 3$ und eine Kollineation $\beta \in PGL_3(\mathbb{K}') \setminus PGL_3(\mathbb{K})$, so daß die Kurve $(C^\alpha)^\beta$ die Nullstellenmenge eines Polynoms $F \in \mathbb{K}'[w, x, y]$ ist mit

$$F(w, x, y) = \sum_{i=0}^N w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) + \frac{1}{2} b_i w^{n-2p^i} x^{2p^i}.$$

Die Kurve C hat in diesem Fall keinen Knoten, d.h. $b_0 \neq 0$. Die Singularität von C^α ist ein Punkt aus $\mathcal{P}_2(\mathbb{K}') \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und ihre Tangente ist eine Gerade in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K}') \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Beweis:

(1) Es ist $\Gamma_C = V \rtimes Z$ (vgl. Satz 28), wobei V induziert wird durch V' mit

$$V' = \left\{ M(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ s & -r & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : r : s) \in C \right\}$$

und Z endlich ist. Natürlich ist der Stabilisator Γ_{C^α} der Kurve C^α gleich $(\Gamma_C)^\alpha = V^\alpha \rtimes Z^\alpha$. Weil $|(\Gamma_C)^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$ ist, ist auch $|V^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$:

Aus $\Gamma_C = \bigcup_{z \in Z} Vz$ folgt $(\Gamma_C)^\alpha = \bigcup_{z \in Z} V^\alpha z^\alpha$, also existiert ein $z \in Z$ mit $|V^\alpha z^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$. Es sei $V^\alpha z^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K}) = \{v_j^\alpha z^\alpha : j \in J\}$ für eine geeignete Indexmenge J und paarweise verschiedene $v_j \in V$. Weiter sei $v_{j_0}^\alpha z^\alpha$ ein fest gewähltes Element aus $PGL_3(\mathbb{K}) \cap V^\alpha z^\alpha$. Es ist $\{v_j^\alpha z^\alpha (v_{j_0}^\alpha z^\alpha)^{-1} : j \in J\} = \{(v_j v_{j_0}^{-1})^\alpha : j \in J\}$ eine unendliche Menge, die in $V^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})$ enthalten ist.

(2) Es sei $S = (1 : 0 : 0)^\alpha$ die Singularität von C^α und $T_S = [\infty]^\alpha$ die Tangente in S an C^α (C hat nur eine Singularität mit nur einer Tangente).

Wenn nun $A \in GL_3(\mathbb{L})$ eine Matrix ist, die α repräsentiert, dann ist V^α gegeben durch die Menge $\{AMA^{-1} \in GL_3(\mathbb{L}) : M \in V'\}$. Wenn für $M \in V'$ die Matrix AMA^{-1} eine Kollineation in $PGL_3(\mathbb{K})$ induziert, existiert ein $t \in \mathbb{L}_*$ mit $tAMA^{-1} =: B \in GL_3(\mathbb{K})$. Das charakteristische Polynom von B ist in diesem Fall gleich $(x-t)^3 \in \mathbb{L}[x]$ bzw. $x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - t^3 \in \mathbb{K}[x]$.

(3) Es sei nun entweder $\text{char}\mathbb{K} > 3$ oder aber \mathbb{K} ein perfekter Körper der Charakteristik 3.

Dann ist das Polynom $x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - t^3 \in \mathbb{K}[x]$ reduzibel über \mathbb{K} , es hat also $B = tAMA^{-1}$ einen Eigenvektor im Vektorraum \mathbb{K}^3 . Die Kurve C hat mit der Geraden $[0 : 1 : 0]$ nur endlich viele Punkte $(1 : 0 : s)$ gemeinsam, also besitzt V nur endlich viele Kollineationen, die von der Singularität $(0 : 0 : 1)$ von C verschiedene Fixpunkte haben (für $(1 : r : s) \in C$ mit $r \neq 0$ betrachte man die Eigenvektoren der Matrix $M(r, s)$). Wegen $|V^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$ ist deswegen $(0 : 0 : 1)^\alpha = S \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Dual argumentiert man für die Tangente und erhält $T_S = [\infty]^\alpha$ als \mathbb{K} -rationale Gerade.

(3a) Es sei nun $\beta_1 \in PGL_3(\mathbb{K})$ so, daß $S^{\beta_1} = (0 : 0 : 1)$ und $T_S^{\beta_1} = [\infty]$ ist, weiter sei für einen Punkt $P \in C^\alpha \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ mit $P \notin T_S$ das Bild $P^{\beta_1} = (1 : 0 : 0)$. So ein β_1 existiert, da die $PGL_3(\mathbb{K})$ transitiv auf den nichtentarteten Vierecken von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ operiert.

Weil V transitiv auf $C \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ operiert, existiert ein $\mu \in V$ mit $(1 : 0 : 0)^\mu = P^{\alpha^{-1}}$. Setze $\alpha_1 = \beta_1 \circ \alpha \circ \mu$. Die Kollineation α_1 wird dann induziert von einer Matrix $A_1 \in GL_3(\mathbb{L})$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & d & e \end{pmatrix}.$$

Wegen $V^\mu = V$ und $\beta_1 \in PGL_3(\mathbb{K})$ gilt:

$$|V^{\alpha_1} \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty, |C^{\alpha_1} \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty$$

Dabei wird V^{α_1} induziert von $(V^{\alpha_1})'$ mit

$$(V^{\alpha_1})' = \left\{ (M(r, s))^{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ br & 1 & 0 \\ dr + es & -\frac{er}{b} & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : r : s) \in C \right\}.$$

Da $|(V^{\alpha_1})' \cap GL_3(\mathbb{K})| = \infty$ ist, existiert ein $r \neq 0$ mit $(M(r, s))^{A_1} \in GL_3(\mathbb{K})$, also $br \in \mathbb{K}_*$ und $-\frac{er}{b} \in \mathbb{K}_*$. Dann ist $e = b^2k$ für ein $k \in \mathbb{K}_*$. Es werde nun $\beta_2 \in PGL_3(\mathbb{K})$ induziert von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}.$$

Setze $\alpha_2 := \beta_2 \circ \alpha_1$, d.h. α_2 ist gegeben durch $A_2 \in GL_3(\mathbb{L})$ mit

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & f & b^2 \end{pmatrix}, f = \frac{d}{k}.$$

Wegen $\beta_2 \in PGL_3(\mathbb{K})$ ist $|V^{\alpha_2} \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$ sowie $|C^{\alpha_2} \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty$, wobei V^{α_2} induziert wird von $(V^{\alpha_2})'$ mit

$$(V^{\alpha_2})' = \left\{ (M(r, s))^{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ br & 1 & 0 \\ fr + b^2s & -br & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : r : s) \in C \right\}.$$

Wegen $(1 : 0 : 0) \in C^{\alpha_2}$ und der Transitivität von V^{α_2} auf $C^{\alpha_2} \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ ist aber auch

$$(V^{\alpha_2})' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ s & -r & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : r : s) \in C^{\alpha_2} \right\}.$$

(3b) Setze nun $\beta := \beta_2 \circ \beta_1 \in PGL_3(\mathbb{K})$. Es ist $C^{\alpha_2} = (C^\alpha)^\beta$. Andererseits ist C^{α_2} die Nullstellenmenge des Polynoms F mit

$$\begin{aligned} F(w, x, y) &= (G \circ A_2^{-1})(w, x, y) \\ &= \sum_{i=0}^N w^{n-p^i} \left[\left(c_i \frac{1}{b^{p^i}} - d_i \frac{f^{p^i}}{b^{3p^i}} \right) x^{p^i} + \frac{d_i}{b^{2p^i}} y^{p^i} \right] + \frac{1}{2} \frac{d_i}{b^{2p^i}} w^{n-2p^i} x^{2p^i}. \end{aligned}$$

Setzt man für $i = 0, \dots, N$ schließlich $a_i := \frac{c_i}{b^{p^i}} - d_i \frac{f^{p^i}}{b^{3p^i}}$, $b_i := \frac{d_i}{b^{2p^i}}$, so ist (I) bewiesen, wenn man berücksichtigt, daß man oBdA. $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ annehmen kann: Eine Kurve in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ mit unendlich vielen \mathbb{K} -rationalen Punkten ist – bis auf multiplikative Vielfache – die Nullstellenmenge eines Polynoms mit Koeffizienten in \mathbb{K} .

(4) Es sei nun $\text{char}\mathbb{K} = 3$ und \mathbb{K} nicht perfekt. Die Kurve C hat mit der Geraden $[0 : 1 : 0]$ nur endlich viele Punkte $(1 : 0 : s)$ gemeinsam, also besitzt V nur endlich viele Kollineationen, die von der Singularität $(0 : 0 : 1)$ von C verschiedene Fixpunkte haben. Es sei

$$V'_* := \{M(r, s) \in V' : r \neq 0, \exists t \in \mathbb{L}_* \text{ mit } tAM(r, s)A^{-1} \in GL_3(\mathbb{K})\}.$$

Für die von V'_* induzierte Menge von Kollineationen V_* ist demnach $|V_*^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$.

(4a) Wenn nun für ein $M \in V'_*$ ein $t \in \mathbb{K}_*$ existiert mit $tAMA^{-1} =: B \in GL_3(\mathbb{K})$, so zerfällt das charakteristische Polynom von B über \mathbb{K} zu $(x-t)^3 \in \mathbb{K}[x]$, also ist die Singularität $(0:0:1)^\alpha = S$ von C^α in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ enthalten und ihre Tangente $[\infty]^\alpha = T_S$ auch. In diesem Fall liegt die Situation (IIa) vor, der Beweis vollzieht sich analog zu den Schritten (3a) und (3b).

(4b) Wir nehmen nun an, daß für alle $M \in V'_*$ und für alle $t \in \mathbb{L}_*$ mit $tAMA^{-1} \in GL_3(\mathbb{K})$ gilt: $t \notin \mathbb{K}$

Wählt man ein festes Paar (M_0, t_0) mit $M_0 \in V'_*$ und $t_0 \in \mathbb{L}_* \setminus \mathbb{K}_*$, so daß $t_0AM_0A^{-1} = B_0 \in GL_3(\mathbb{K})$ ist, so ist das charakteristische Polynom von B_0 gleich $x^3 - u_0 \in \mathbb{K}[x]$ mit $u_0 = t_0^3$. Es sei $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(t_0)$. Dann ist \mathbb{K}' eine rein inseparable Körpererweiterung von \mathbb{K} vom Grad 3. Die Singularität $(0:0:1)^\alpha$ von C^α ist dann in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K}') \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ enthalten und die Tangente $[\infty]^\alpha$ ist eine Gerade in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K}') \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, da $x^3 - u_0$ über \mathbb{K}' zu $(x-t_0)^3$ zerfällt, aber über \mathbb{K} irreduzibel ist. Die Kurve C kann keinen Knoten haben, denn für einen \mathbb{K} -rationalen Punkt auf C^α ist auch seine Tangente eine Gerade in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Da sich, falls C einen Knoten hat, alle Tangenten in diesem Knoten treffen, müßte der Knoten von C^α ein Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ sein. Bei KV-Kurven mit Knoten fällt dieser aber mit der Singularität zusammen.

Mit denselben Überlegungen wie in (3a) und (3b), allerdings jeweils für Kollineationen β_1 und β_2 in $PGL_3(\mathbb{K}')$ statt $PGL_3(\mathbb{K})$, kann man jetzt zeigen, daß ein $\beta \in PGL_3(\mathbb{K}')$ existiert, so daß $(C^\alpha)^\beta$ die Nullstellenmenge eines Polynoms $F \in \mathbb{K}'[w, x, y]$ ist mit $F(w, x, y) = \sum_{i=0}^N w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}) + \frac{1}{2} b_i w^{n-2p^i} x^{2p^i}$ und $|(C^\alpha)^\beta \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K}')| = \infty$ sowie $|(V^\alpha)^\beta \cap PGL_3(\mathbb{K}')| = \infty$. Es ist $\beta \notin PGL_3(\mathbb{K})$, da $(0:0:1)^{\beta \circ \alpha} = (0:0:1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist, aber $(0:0:1)^\alpha \notin \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. \square

Als nächstes untersuchen wir Translationskurven.

HILFSSATZ 34 (Normalformen für Translationskurven) *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper von endlicher ungerader Charakteristik p und \mathbb{K} ein unendlicher Teilkörper von \mathbb{L} . Eine irreduzible Translationskurve C vom Grad n in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L})$, die keine VP-Kurve ist, habe den Stabilisator $\Gamma_C \leq PGL_3(\mathbb{L})$ und sei oBdA. die Nullstellenmenge des Polynoms $G \in \mathbb{L}[w, x, y]$ mit $G(w, x, y) = w^{n-1}y + \sum_{i=1}^N w^{n-p^i} (c_i x^{p^i} + d_i y^{p^i})$ und $n = p^N$ sowie $(c_N : d_N) \in \{(1:0), (0:1)\}$ (vgl. Definition 14, S.101). Für eine Kollineation $\alpha \in PGL_3(\mathbb{L})$ sei*

$$|C^\alpha \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty, \quad |(\Gamma_C)^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty.$$

Dann gilt:

- (I) *Es existiert eine Kollineation $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$, so daß $(C^\alpha)^\beta$ die Nullstellenmenge eines Polynoms $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ ist mit $F(w, x, y) = w^{n-1}y + \sum_{i=1}^N w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i})$.*
- (II) *Ist \mathbb{K} nicht perfekt und ist die Singularität S von C verschieden vom Knoten Q von C , so ist S^α bzw. $(S^\alpha)^\beta$ eventuell ein Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L}) \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Ist \mathbb{K} perfekt, so ist $S^\alpha \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.*
- (III) *Für $S^\alpha \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist $(a_N, b_N) \equiv (c_N, d_N)$, also $(S^\alpha)^\beta = S$.*

Beweis:

(1) Wie im Teil (1) des Beweises von Hilfssatz 33 zeigt man, daß $|V^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$ ist, wobei

$V \triangleleft \Gamma_C$ ist und induziert wird von

$$V' = \left\{ M(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : (1 : r : s) \in C \right\} \text{ (vgl. Satz 25, S. 102).}$$

Es sei weiter $V_* = \{v \in V : v^\alpha \in PGL_3(\mathbb{K})\}$ und $V'_* \subseteq V'$ die Menge aller Matrizen, die V_* induzieren. Wenn $A \in GL_3(\mathbb{L})$ ein Repräsentant für α ist, folgt:

$$\forall M \in V'_* \exists t \in \mathbb{L}_* \text{ mit } tAMA^{-1} \in GL_3(\mathbb{K})$$

(2) Betrachte für so ein $M \in V'_*$ mit $B := tAMA^{-1} \in GL_3(\mathbb{K})$ das charakteristische Polynom $\chi_B(x) = x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - t^3 \in \mathbb{K}[x]$ von B . Dieses Polynom ist über \mathbb{K} reduzibel und B induziert auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ eine wohldefinierte Elation:

Für $\text{char}\mathbb{K} \neq 3$ ist χ_B sicher reduzibel. Für $\text{char}\mathbb{K} = 3$ und χ_B irreduzibel könnte man B innerhalb der $GL_3(\mathbb{K})$ zur rationalen Normalform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

konjugieren. Diese Matrix induziert aber für $t \notin \mathbb{K}$ – gesehen als Element der $GL_3(\mathbb{L})$ – keine Perspektivität von $PGL_3(\mathbb{L})$. Das kann nicht sein, also ist auch für $\text{char}\mathbb{K} = 3$ das Polynom χ_B reduzibel über \mathbb{K} .

Wenn B auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ keine Elation induzieren würde, könnte man B innerhalb der $GL_3(\mathbb{K})$ konjugieren zu

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} =: J(t).$$

Das kann auch nicht sein, denn die Jordannormalform von B innerhalb der $GL_3(\mathbb{L})$ ist nicht konjugiert zu $J(t)$. Also induziert B eine Elation in der $PGL_3(\mathbb{K})$, die das Zentrum $Z \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ und die Achse g hat, dabei ist g eine Gerade mit unendlich vielen \mathbb{K} -rationalen Punkten.

Es sei $Q = (0 : 1 : 0)$ der Knoten von C und Q^α der Knoten von C^α . Der Punkt Q^α muß in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ liegen, denn C^α hat unendlich viele \mathbb{K} -rationale Punkte und deren Tangenten sind dann \mathbb{K} -rationale Geraden, die sich in einem \mathbb{K} -rationalen Punkt treffen müssen.

(3) Es sei P ein \mathbb{K} -rationaler Punkt auf C^α , der nicht auf der Geraden g liegt. Wegen der Transitivität von V auf C existiert ein $\mu \in V$ mit $(1 : 0 : 0)^\mu = P^{\alpha^{-1}}$. Weiter sei $\beta_1 \in PGL_3(\mathbb{K})$ so, daß $P^{\beta_1} = (1 : 0 : 0)$ ist und $(Q^\alpha)^{\beta_1} = (0 : 1 : 0)$. Für die Gerade $[\infty]$ – die Achse der von $M \in V'_*$ induzierten Elation aus V – gilt:

$$[\infty]^{\beta_1 \circ \alpha \circ \mu} = [1 : 0 : x] \text{ mit } x \in \mathbb{K}.$$

Es sei nun $\beta_2 \in PGL_3(\mathbb{K})$ so, daß $(1 : 0 : 0)^{\beta_2} = (1 : 0 : 0)$ ist sowie $(0 : 1 : 0)^{\beta_2} = (0 : 1 : 0)$ und außerdem $[1 : 0 : x]^{\beta_2} = [1 : 0 : 0] = [\infty]$ (so ein β_2 existiert sicher). Setze nun $\alpha_1 := \beta_2 \circ \beta_1 \circ \alpha \circ \mu$. Für einen Repräsentanten $A_1 \in GL_3(\mathbb{L})$ von α_1 gilt dann wegen $(1 : 0 : 0)^{\alpha_1} = (1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)^{\alpha_1} = (0 : 1 : 0)$, $[\infty]^{\alpha_1} = [\infty]$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Es ist C^{α_1} die Nullstellenmenge von $\frac{1}{c}(G \circ A_1^{-1})$ mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}((G \circ A_1^{-1})(w, x, y)) &= w^{n-1}y + \sum_{i=1}^N w^{n-p^i} \left(\frac{c_i a^{p^i}}{c} x^{p^i} + \left(\frac{c_i b^{p^i}}{c} + d_i c^{p^i-1} \right) y^{p^i} \right) \\ &=: w^{n-1}y + \sum_{i=1}^N w^{n-p^i} (a'_i x^{p^i} + b'_i y^{p^i}) \\ &=: \tilde{F}(w, x, y). \end{aligned}$$

Setze $\tilde{\beta} = \beta_2 \circ \beta_1 \in PGL_3(\mathbb{K})$. Es ist $C^{\alpha_1} = (C^\alpha)^{\tilde{\beta}}$ und deshalb ist $\tilde{F} \in \mathbb{K}[w, x, y]$ sowie $|C^{\alpha_1} \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty$, $|V^{\alpha_1} \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$.

(4) Je nachdem, ob $(c_N, d_N) \equiv (0, 1)$ oder $\equiv (1, 0)$ ist, fällt die Singularität von C mit dem Knoten zusammen oder nicht. Wir unterscheiden drei Fälle.

(4a) Falls die Singularität S von C mit dem Knoten Q von C zusammenfällt, ist $(a'_N, b'_N) \equiv (0, 1)$. Setze in diesem Fall $a_i := a'_i$, $b_i := b'_i$ für $i = 1, \dots, N$ sowie $\beta := \tilde{\beta}$, $F := \tilde{F}$. Dann ist die Behauptung bewiesen.

(4b) Falls die Singularität S von C verschieden vom Knoten Q von C ist und falls zusätzlich $S^{\alpha_1} = (0 : -\frac{b}{a} : 1)$ ein Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist, setze

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{K}).$$

Es sei β_3 die von X induzierte Kollineation in $PGL_3(\mathbb{K})$ und weiter $\alpha_2 := \beta_3 \circ \alpha_1$. Dann ist C^{α_2} die Nullstellenmenge von $\tilde{F} \circ X^{-1} \in \mathbb{K}[w, x, y]$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{F} \circ X^{-1}(w, x, y) &= w^{n-1}y + \sum_{i=1}^N w^{n-p^i} \left(a'_i x^{p^i} + (b'_i - a'_i \frac{b^{p^i}}{a^{p^i}}) y^{p^i} \right) \\ &=: w^{n-1}y + \sum_{i=1}^N w^{n-p^i} (a_i x^{p^i} + b_i y^{p^i}). \end{aligned}$$

Es ist $b_N = b'_N - a'_N \frac{b^{p^N}}{a^{p^N}} = -\frac{c_N a^{p^N}}{c} \frac{b^{p^N}}{a^{p^N}} + \frac{c_N b^{p^N}}{c} + d_N c^{p^N-1} = 0$ wegen $d_N = 0$. Setze nun $\beta := \beta_3 \circ \beta_2 \circ \beta_1$ und $F = \tilde{F} \circ X^{-1}$. Dann ist die Behauptung bewiesen.

(4c) Falls die Singularität S von C verschieden vom Knoten Q von C ist und falls $S^{\alpha_1} = (0 : -\frac{b}{a} : 1)$ kein Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist, ist $t := -\frac{b}{a} \notin \mathbb{K}$, aber wegen $(a'_N, b'_N) = (\frac{c_N a^{p^N}}{c}, \frac{c_N b^{p^N}}{c}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ gilt immerhin $t^{p^N} \in \mathbb{K}$. Diese Situation kann also nur für nicht perfekte Körper auftreten. In diesem Fall setze wie in (4a) $a_i = a'_i$, $b_i = b'_i$ für $i = 1, \dots, N$ sowie $\beta = \tilde{\beta}$, $F = \tilde{F}$. Dann ist die Behauptung bewiesen. \square

Nun betrachten wir verallgemeinerte Parabeln, schließen aber den Sonderfall $w^{p^N-1}y = x^{p^j}$ in Charakteristik p vorerst aus.

HILFSSATZ 35 (Normalform von verallgemeinerten Parabeln) *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char } \mathbb{L} \neq 2$ und \mathbb{K} ein unendlicher Teilkörper von \mathbb{L} . Die Kurve $C := \{(w, x, y) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L}) : w^{n-k}y^k = x^n\}$ sei eine irreduzible VP-Kurve, die keine Translationskurve ist, mit Stabilisator $\Gamma_C \leq PGL_3(\mathbb{L})$. Weiter sei $\alpha \in PGL_3(\mathbb{L})$ eine Kollineation mit $|C^\alpha \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty$, $|(\Gamma_C)^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$.*

Dann existiert eine Kollineation $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$ mit $(C^\alpha)^\beta = C$.

Beweis:

(1) Wir führen zuerst einige Notationen ein.

Es sei Δ das Einheitsdreieck mit Ecken $E_1 = (1 : 0 : 0)$, $E_2 = (0 : 1 : 0)$, $E_3 = (0 : 0 : 1)$. Für $j = 1, 2, 3$ sei e_j der zugehörige Einheitsvektor, je nach Zusammenhang im Vektorraum \mathbb{L}^3 bzw. \mathbb{K}^3 . Die Matrix $A \in GL_3(\mathbb{L})$ sei ein Repräsentant für die Kollineation α .

Es sei I'' eine Indexmenge, so daß

$$\left\{ M_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_i^k & 0 \\ 0 & 0 & r_i^n \end{pmatrix} : i \in I'' \right\} \subset GL_3(\mathbb{L})$$

die Gruppe Γ_C induziert (vgl. Hilfssatz 24, S.97), es gelte dabei $M_i \neq M_j$ für $i \neq j$, $i, j \in I''$. Die Indexmenge $I' \subset I''$ sei gegeben durch $I' := \{i \in I'' : |\{1, r_i^k, r_i^n\}| = 3\}$. Es ist $|I'| = \infty$, da Γ_C nur endlich viele Homologien enthalten kann. Nun sei schließlich $I \subseteq I'$ die Menge aller Indizes, so daß für die zugehörigen Matrizen M_i gilt:

$$\exists t_i \in \mathbb{L}_* \text{ mit } t_i A M_i A^{-1} =: B_i \in GL_3(\mathbb{K})$$

Es ist $|I| = \infty$ wegen $|(\Gamma_C)^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$. Setze noch $R := \{r_i : i \in I\}$ und zuletzt $\chi_i \in \mathbb{K}[x]$ das charakteristische Polynom von B_i (für ein fest gewähltes t_i).

(2) Wir zeigen: Die Ecken von Δ^α liegen in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Für alle $i \in I$ gilt: Die von der Matrix $B_i \in GL_3(\mathbb{K}) \subseteq GL_3(\mathbb{L})$ induzierte Kollineation – aufgefaßt als Element der $PGL_3(\mathbb{L})$ – hat genau die Fixpunkte E_j^α , $j = 1, 2, 3$. Eine Matrix B_i hat im \mathbb{L} -Vektorraum \mathbb{L}^3 genau drei linear unabhängige Eigenvektoren Ae_j zu den Eigenwerten t_i , $t_i r_i^k$, $t_i r_i^n$.

Wir unterscheiden jetzt fünf Fälle, nämlich:

- (a) Genau zwei Ecken von Δ^α liegen in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.
- (b) Nur E_1^α liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.
- (c) Nur E_2^α liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.
- (d) Nur E_3^α liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.
- (e) Keine der drei Ecken von Δ^α liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Diese Fälle führen wir nacheinander zum Widerspruch.

(2a) Angenommen, genau zwei Ecken von Δ^α liegen in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Dann hat für alle $i \in I$ die Matrix B_i genau zwei linear unabhängige Eigenvektoren im \mathbb{K} -Vektorraum \mathbb{K}^3 , also zerfällt χ_i über \mathbb{K} in Linearfaktoren. Da χ_i in \mathbb{L} drei verschiedene Nullstellen hat, gilt das natürlich auch in \mathbb{K} . Dann hat aber B_i drei linear unabhängige Eigenvektoren im \mathbb{K}^3 , Widerspruch.

(2b) Angenommen, nur E_1^α liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$. Es sei oBdA. die Matrix $A \in GL_3(\mathbb{L})$ so normiert, daß $Ae_1 =: v_1 \in \mathbb{K}^3$ ist. Wegen $B_i v_1 = t_i A M_i A^{-1} A e_1 = t_i v_1$ und $B_i \in GL_3(\mathbb{K})$ ist $t_i \in \mathbb{K} \forall i \in I$. Wir können also $t_i = 1 \forall i \in I$ annehmen. Für das charakteristische Polynom χ_i ergibt sich dann für alle $i \in I$:

$$\begin{aligned} \chi_i(x) &= (x-1)(x^2 - x(r_i^k + r_i^n) + r_i^{k+n}) \in \mathbb{K}[x] \\ &= (x-1)(x-r_i^k)(x-r_i^n) \in \mathbb{L}[x] \setminus \mathbb{K}[x]. \end{aligned}$$

Für ein fest gewähltes $i_0 \in I$ sei nun $r_{i_0} =: a$ sowie $\mu(x) := x^2 - x(a^k + a^n) + a^{k+n}$. Es ist $\mu \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel und separabel vom Grad zwei. Der Zerfällungskörper dieses Polynoms sei $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(a^k) = \mathbb{K}(a^n)$. Es gilt $[\mathbb{K}' : \mathbb{K}] = 2$ und $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(a)$:

Die Irreduzibilität der Kurve C impliziert, daß n und k teilerfremd sind, also existieren zwei ganze Zahlen u und v mit $un + vk = 1$. Aus $a^k, a^n \in \mathbb{K}'$ folgt $(a^k)^v \cdot (a^n)^u = a^{un+vk} = a \in \mathbb{K}'$, also $\mathbb{K}(a) = \mathbb{K}'$.

Wegen $\deg \mu = 2$ und $a^n \neq a^k$ existiert genau ein nichttrivialer Körperautomorphismus ϕ von \mathbb{K}' , der \mathbb{K} invariant läßt. Dieser muß dann die beiden Wurzeln a^k und a^n von μ vertauschen, also ist $\phi(a^n) = a^k$ und $\phi(a^k) = a^n$. Es folgt:

$$\phi(a) = \phi((a^k)^v (a^n)^u) = (\phi(a^k))^v (\phi(a^n))^u = a^{vn+uk}$$

Wegen $\mu \in \mathbb{K}[x]$ haben wir außerdem $a^{n+k} \in \mathbb{K}$, also

$$\left. \begin{array}{l} a^{n+k} = a^n \phi(a^n) \\ a^{n+k} = a^k \phi(a^k) \end{array} \right\} \implies a^{n-k} \phi(a^{n-k}) = (a\phi(a))^{n-k} = 1$$

Es folgt

$$(a \cdot a^{vn+uk})^{n-k} = a^{(1+vn+uk)(n-k)} = 1.$$

Es ist $n - k \neq 0$ und $1 + vn + uk \neq 0$, wie man leicht nachrechnet. Man beachte dabei, daß für $u = -v = 1$ und $n = k + 1$ zwar $1 + vn + uk = 0$ ist, aber für irreduzible VP-Kurven oBdA. $2k < n$ angenommen werden kann. Dann wäre $2k < k + 1$ bzw. $k < 1$, aber $k \in \mathbb{N}$.

Also ist a ein Element aus \mathbb{L}_* von endlicher multiplikativer Ordnung.

Nun betrachte für $i \in I$ das Polynom $\mu_i(x) = x^2 - x(r_i^k + r_i^n) + r_i^{k+n} \in \mathbb{K}[x]$ und den zugehörigen Zerfällungskörper \mathbb{K}'_i von μ_i .

Für alle $i \in I$ gilt $\mathbb{K}'_i = \mathbb{K}'$:

Jede Matrix B_i hat im \mathbb{K}'_i -Vektorraum $(\mathbb{K}'_i)^3$ drei linear unabhängige Eigenvektoren, da χ_i in $\mathbb{K}'_i[x]$ zerfällt. Andererseits hat jede Matrix B_i im \mathbb{L} -Vektorraum \mathbb{L}^3 dieselben Eigenvektoren wie B_{i_0} . Wenn $v \in (\mathbb{K}')^3$ so ein Eigenvektor von B_{i_0} ist, ist also $B_i v = \lambda v$ mit $\lambda \in \{1, r_i^k, r_i^n\} \subset \mathbb{K}'_i$. Wegen $B_i \in GL_3(\mathbb{K})$ ist $B_i v \in (\mathbb{K}')^3$, also $\lambda v \in (\mathbb{K}')^3$ und deshalb auch $\lambda \in \mathbb{K}'$ wegen $v \neq 0$.

Der (einzige nichttriviale) Körperautomorphismus $\phi \in \text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}')$ permutiert nun für jedes $i \in I$ die zwei Nullstellen von μ_i , also gilt, wenn man die vorher für a gemachte Rechnung für alle r_i mit $i \in I$ durchführt:

$$r_i^{(1+vn+uk)(n-k)} = 1, \quad c := (1 + vn + uk)(n - k) \neq 0$$

Die Menge $R = \{r_i : i \in I\}$ besteht also aus c -ten Einheitswurzeln von \mathbb{L} und ist somit endlich. Widerspruch.

(2c) Angenommen, nur E_2^α liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Es sei oBdA. die Matrix $A \in GL_3(\mathbb{L})$ so normiert, daß $Ae_2 =: v_2 \in \mathbb{K}^3$ ist. Wegen $B_i v_2 = t_i A M_i A^{-1} A e_2 = t_i r_i^k v_2$ und $B_i \in GL_3(\mathbb{K})$ ist also $t_i r_i^k \in \mathbb{K}$. Für das charakteristische Polynom χ_i ergibt sich dann für alle $i \in I$:

$$\begin{aligned} \chi_i(x) &= (x - t_i r_i^k)(x^2 - x(t_i + t_i r_i^n) + t_i^2 r_i^n) \in \mathbb{K}[x] \\ &= (x - t_i r_i^k)(x - t_i)(x - t_i r_i^n) \in \mathbb{L}[x] \setminus \mathbb{K}[x]. \end{aligned}$$

Für ein fest gewähltes $i_0 \in I$ sei nun $r_{i_0} = a$ und $t_{i_0} = t$ sowie $\mu(x) = x^2 - x(t + ta^n) + t^2 a^n$. Es ist $\mu \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel und separabel vom Grad zwei. Der Zerfällungskörper dieses Polynoms sei

$\mathbb{K}' = \mathbb{K}(t) = \mathbb{K}(ta^n)$. Ähnlich wie in (2b) rechnet man nach, daß $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(a)$ ist. Es ist $\text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}') = \{id, \phi\}$ mit $\phi(t) = ta^n$, $\phi(ta^n) = t$ und $\phi(ta^k) = ta^k$ und deswegen

$$\begin{aligned}\phi(a^n) &= \phi\left(\frac{ta^n}{t}\right) = \frac{\phi(ta^n)}{\phi(t)} = \frac{t}{ta^n} = a^{-n}, \\ \phi(a^k) &= \phi\left(\frac{ta^k}{t}\right) = \frac{\phi(ta^k)}{\phi(t)} = \frac{ta^k}{ta^n} = a^{k-n}.\end{aligned}$$

Daraus folgt (mit $un + vk = 1$, $u, v \in \mathbb{Z}$):

$$\phi(a) = (\phi(a^k))^v (\phi(a^n))^u = a^{v(k-n)-un}$$

Wegen $a^n \phi(a^n) = 1$ haben wir außerdem:

$$a^{(1+v(k-n)-un)n} = 1$$

Es ist $(n, k) = 1$ und $n > 1$ und deswegen ist $1 + v(k-n) - un \neq 0$, wie man leicht nachrechnet. Also ist a ein Element aus \mathbb{L}_* von endlicher multiplikativer Ordnung.

Nun kann man analog wie in (2b) fortfahren und erhält $|R| < \infty$, Widerspruch.

(2d) Angenommen, nur E_3^α liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Es sei oBdA. die Matrix $A \in GL_3(\mathbb{L})$ so normiert, daß $Ae_3 =: v_3 \in \mathbb{K}^3$ ist. Wegen $B_i v_3 = t_i r_i^n v_3$ und $B_i \in GL_3(\mathbb{K})$ ist also $t_i r_i^n \in \mathbb{K}$. Für das charakteristische Polynom χ_i ergibt sich dann für alle $i \in I$:

$$\begin{aligned}\chi_i(x) &= (x - t_i r_i^n)(x - t_i)(x - t_i r_i^k) \in \mathbb{L}[x] \setminus \mathbb{K}[x] \\ &= (x - t_i r_i^n)(x^2 - x(t_i + t_i r_i^k) + t_i^2 r_i^k) \in \mathbb{K}[x]\end{aligned}$$

Für ein fest gewähltes $i_0 \in I$ sei wieder $r_{i_0} = a$ und $t_{i_0} = t$ sowie $\mu(x) = x^2 - x(t + ta^k) + t^2 a^k$. Es ist $\mu \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel und separabel vom Grad zwei. Der Zerfällungskörper dieses Polynoms sei $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(t) = \mathbb{K}(ta^k)$. Ähnlich wie in (2b) rechnet man nach, daß $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(a)$ ist. Es ist $\text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}') = \{id, \phi\}$ mit $\phi(t) = ta^k$, $\phi(ta^k) = t$ und $\phi(ta^n) = ta^n$ und deswegen

$$\phi(a^n) = \phi\left(\frac{ta^n}{t}\right) = \frac{ta^n}{ta^k} = a^{n-k}, \quad \phi(a^k) = \phi\left(\frac{ta^k}{t}\right) = \frac{t}{ta^k} = a^{-k}.$$

Daraus folgt (mit $un + vk = 1$, $u, v \in \mathbb{Z}$):

$$\phi(a) = (\phi(a^k))^v (\phi(a^n))^u = a^{-kv+(n-k)u}$$

Wegen $a^k \phi(a^k) = 1$ haben wir außerdem:

$$a^{(1-kv+(n-k)u)k} = 1$$

Für $k \neq 1$ ist $1 - kv + (n - k)u \neq 0$, wie man leicht nachrechnet. Für $k = 1$ ist $\phi(a) = \frac{1}{a}$ und $(\phi(a))^n = \phi(a^n) = a^{n-1}$, also $a^{-n} = a^{n-1} \iff a^{2n-1} = 1$. Deshalb ist – unabhängig davon, ob k von 1 verschieden ist oder nicht – a ein Element endlicher multiplikativer Ordnung in \mathbb{L}_* .

Nun kann man wie in (2b) fortfahren und erhält $|R| < \infty$, Widerspruch.

(2e) Angenommen, keine der drei Ecken von Δ^α liegt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Dann ist χ_i irreduzibel und separabel über \mathbb{K} vom Grad drei für jedes $i \in I$. Für ein fest gewähltes $i_0 \in I$ sei nun $r_{i_0} = a$ und $t_{i_0} = t$ sowie $\chi = \chi_{i_0}$ und \mathbb{K}' der Zerfällungskörper von χ . Es ist $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(a)$, denn wegen $a^k, a^n \in \mathbb{K}'$, $un + vk = 1 (u, v \in \mathbb{Z})$ folgt $a = (a^k)^v (a^n)^u \in \mathbb{K}'$, außerdem ist $t + ta^k + ta^n$ als Koeffizient von χ in \mathbb{K} enthalten, also ist $t \in \mathbb{K}(a)$.

Dann existiert ein Körperautomorphismus $\phi \in \text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}')$, der auf den drei Wurzeln t, ta^k, ta^n von χ als 3-Zykel wirkt, etwa $\phi(t) = ta^k, \phi(ta^k) = ta^n, \phi(ta^n) = t$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \phi(a^k) &= \phi\left(\frac{ta^k}{t}\right) = \frac{ta^n}{ta^k} = a^{n-k} \Rightarrow (a^k \phi(a^k)) = a^n & (A) \\ \phi(a^n) &= \phi\left(\frac{ta^n}{t}\right) = \frac{t}{ta^k} = a^{-k} & (B) \end{aligned}$$

Mit $1 = un + vk$ für $u, v \in \mathbb{Z}$ ist außerdem

$$\phi(a) = (\phi(a^n))^u (\phi(a^k))^v = a^{-ku+v(n-k)} \quad (C)$$

Wenden wir nun ϕ auf (A) an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \phi(a^k \phi(a^k)) &= \phi(a^k) \phi^2(a^k) = \phi(a^n) \stackrel{(B)}{=} a^{-k}, \text{ also} \\ a^k \phi(a^k) \phi^2(a^k) &= (a \phi(a) \phi^2(a))^k = 1 & (D) \end{aligned}$$

Wenden wir ϕ auf (B) an, so folgt:

$$\phi^2(a^n) = \phi(a^{-k}) \stackrel{(A)}{=} a^{k-n} \Rightarrow a^{-k} a^n \phi^2(a^n) = 1 \stackrel{(B)}{\Rightarrow} a^n \phi(a^n) \phi^2(a^n) = (a \phi(a) \phi^2(a))^n = 1 \quad (E)$$

Wegen $un + vk = 1$ folgt aus (D) und (E):

$$\left((a \phi(a) \phi^2(a))^k\right)^v \left((a \phi(a) \phi^2(a))^n\right)^u = a \phi(a) \phi^2(a) = 1$$

Mit (C) dann

$$a \cdot a^{-ku+v(n-k)} \cdot a^{(-ku+v(n-k))^2} = a^{[1+(-ku+v(n-k))+(-ku+v(n-k))^2]} = 1.$$

Es ist $1 - ku + v(n-k) + (-ku + v(n-k))^2 \neq 0$, da das Polynom $1 + x + x^2$ über \mathbb{Z} irreduzibel ist. Also ist a ein Element aus \mathbb{L}_* von endlicher multiplikativer Ordnung.

Nun betrachte für $i \in I$ das Polynom χ_i und den zugehörigen Zerfällungskörper \mathbb{K}'_i von χ_i . Es gilt für alle $i \in I$: $\mathbb{K}'_i = \mathbb{K}'$ (Argument wie in (2b)). Für ein $j(i) := j \in \{1, 2\}$ operiert nun $\psi := \phi^j$ auf den Wurzeln von χ_i durch $\psi(t_i) = t_i r_i^k, \psi(t_i r_i^k) = t_i r_i^n, \psi(t_i r_i^n) = t_i$. Dieselbe Rechnung wie für ϕ, t und a liefert deshalb:

$$\forall i \in I: \quad o(r_i) \mid 1 + (-ku + vn - vk) + (-ku + vn - vk)^2$$

Also ist $|R| < \infty$, Widerspruch.

(3) Es liegen also die Ecken $E_1^\alpha, E_2^\alpha, E_3^\alpha$ von Δ^α in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, etwa $E_j^\alpha = P_j$ für $j = 1, 2, 3$. Es sei P ein Punkt auf $C^\alpha \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, der nicht auf einer Kante von Δ^α liegt. Da die $PGL_3(\mathbb{K})$ transitiv auf den Vierecken von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ operiert, existiert eine Kollineation $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$ mit $\beta(P_j) = E_j, j = 1, 2, 3$, und $\beta(P) = (1 : 1 : 1)$. Es sei nun $\gamma \in \Gamma_C$ die Kollineation, die den Punkt $(1 : 1 : 1) \in C$ auf $P^{\alpha^{-1}} \in C$ abbildet sowie $\alpha' := \beta \circ \alpha \circ \gamma$. Es ist $\alpha' = id$ und deshalb $C^{\alpha'} = (C^\alpha)^\beta = C$ wegen $\gamma \in \Gamma_C$. \square

Zuletzt wenden wir uns dem Spezialfall einer verallgemeinerten Parabel in Charakteristik p zu, die gleichzeitig eine Translationskurve ist.

HILFSSATZ 36 (Normalformen für Translationskurven, die gleichzeitig VP-Kurven sind) *Es sei \mathbb{L} ein algebraisch abgeschlossener Körper von endlicher Charakteristik $p \neq 2$ und \mathbb{K} ein unendlicher Teilkörper von \mathbb{L} . Die Kurve $C \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ sei die Nullstellenmenge des Polynoms $G \in \mathbb{L}[w, x, y]$ mit $G(w, x, y) = w^{p^N-1}y - x^{p^N}$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und Γ_C sei der Stabilisator von C innerhalb der $PGL_3(\mathbb{L})$. Für eine Kollineation $\alpha \in \mathcal{P}_2(\mathbb{L})$ gelte*

$$|C^\alpha \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty, \quad |(\Gamma_C)^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty.$$

Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (I) *Ist die Singularität S^α von C^α ein Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, so existiert ein $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$ mit $(C^\alpha)^\beta = C$.*
- (II) *Ist die Singularität S^α von C^α ein Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{L}) \setminus \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, so existiert ein $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$, so daß die Kurve $(C^\alpha)^\beta$ die Nullstellenmenge des Polynoms $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ ist mit*

$$F(w, x, y) = w^{p^N-1}y - \lambda^{p^N}x^{p^N} - \mu^{p^N}y^{p^N}, \quad \lambda, \mu \notin \mathbb{K}, \quad \lambda^{p^N}, \mu^{p^N} \in \mathbb{K}.$$

Die Gruppe $(\Gamma_C)^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})$ enthält einen Normalteiler W von endlichem Index, dessen nichttriviale Elemente Elationen sind. Der Körper \mathbb{K} ist in diesem Fall ein nicht perfekter Körper.

Beweis:

(1) Dem Hilfssatz 24 entnimmt man, daß Γ_C repräsentiert wird von

$$\Gamma'_C = \left\{ M(r, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & t & 0 \\ r^{p^N} & 0 & t^{p^N} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{L}) : r \in \mathbb{L}, t \in \mathbb{L}_* \right\}.$$

Es ist klar, daß Γ_C auf $C_* := C \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ scharf zweifach transitiv operiert. Es seien nun $S = (0 : 0 : 1)$ die Singularität und $Q = (0 : 1 : 0)$ der Knoten von C , weiter P und R zwei Punkte auf $C^\alpha \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, so daß P, Q, R und S die Ecken eines nichtentarteten Vierecks bilden. Es existiert eine Kollineation $\mu \in \Gamma_C$ mit $(1 : 0 : 0)^\mu = P^{\alpha^{-1}}$ und $(1 : 1 : 1)^\mu = R^{\alpha^{-1}}$. Für $\alpha_1 := \alpha \circ \mu$ gilt dann wegen $C^\alpha = C^{\alpha_1}$, daß $|C^{\alpha_1} \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty$ und $|\Gamma_C^{\alpha_1} \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$ ist.

Der Knoten $Q^\alpha = Q^{\alpha_1}$ ist ein Punkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, denn wenn C^α unendlich viele \mathbb{K} -rationale Punkte hat, muß der Schnittpunkt der (\mathbb{K} -rationalen) Tangenten dieser Punkte in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ liegen.

(2) Wir betrachten den Fall $S^\alpha \in \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Da die $PGL_3(\mathbb{K})$ transitiv auf den nichtentarteten Vierecken von $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ operiert, existiert eine Kollineation $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$ mit $(P^\alpha)^\beta = (1 : 0 : 0)$, $(Q^\alpha)^\beta = (0 : 1 : 0)$, $(R^\alpha)^\beta = (1 : 1 : 1)$ und $(S^\alpha)^\beta = (0 : 0 : 1)$. Offensichtlich ist dann $\gamma := \beta \circ \alpha_1 = id$ und $C^\gamma = (C^\alpha)^\beta = C$. Damit ist (I) gezeigt.

(3) Wir betrachten den Fall $S^\alpha \notin \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Es existiert eine Kollineation $\beta_1 \in PGL_3(\mathbb{K})$ mit $(P^\alpha)^{\beta_1} = (1 : 0 : 0)$, $(R^\alpha)^{\beta_1} = (1 : 1 : 1)$ und $(Q^\alpha)^{\beta_1} = (0 : 1 : 0)$. Die Kollineation $\gamma := \beta_1 \circ \alpha_1$ wird dann induziert von einer Matrix $C_\gamma \in GL_3(\mathbb{L})$ mit

$$C_\gamma = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 1-b & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und das Bild der Singularität S ist gleich $S^\gamma = (a : b : 1)$. Es ist also $a \notin \mathbb{K}$ oder $b \notin \mathbb{K}$. Außerdem ist $[\infty]^\gamma = [1 : 0 : -a]$.

(3a) Es sei nun $a \in \mathbb{K}$, dann ist $b \notin \mathbb{K}$.

Betrachte die Kollineation $\beta_2 \in PGL_3(\mathbb{K})$, die von der Matrix $B_2 \in GL_3(\mathbb{K})$ induziert wird mit

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} & 0 & -\frac{a}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann wird $\epsilon := \beta_2 \circ \gamma$ induziert von der Matrix E mit

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist $\beta := \beta_2 \circ \beta_1 \in PGL_3(\mathbb{K})$ sowie $C^\epsilon = ((C^\mu)^\alpha)^\beta = (C^\alpha)^\beta$ mit $|C^\epsilon \cap \mathcal{P}_2(\mathbb{K})| = \infty$, $|\Gamma_C^\epsilon \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$. Die Kurve C^ϵ ist die Nullstellenmenge des Polynoms $F := G \circ E^{-1} \in \mathbb{K}[w, x, y]$ mit

$$F(w, x, y) = w^{p^N-1}y - \lambda^{p^N}x^{p^N} - \mu^{p^N}y^{p^N}, \quad \lambda = \frac{1}{1-b}, \quad \mu = -\frac{b}{1-b}.$$

Wegen $b \notin \mathbb{K}$ ist $\lambda \notin \mathbb{K}$ und $\mu \notin \mathbb{K}$, wegen $F \in \mathbb{K}[w, x, y]$ ist $\lambda^{p^N} \in \mathbb{K}$ und $\mu^{p^N} \in \mathbb{K}$. Dann ist der Körper \mathbb{K} nicht perfekt. Die Gruppe Γ_C^ϵ wird induziert von allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r(1-b) + r^{p^N}b & t & -bt + bt^{p^N} \\ r^{p^N} & 0 & t^{p^N} \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{L}, t \in \mathbb{L}_*.$$

Damit so eine Matrix eine Kollineation in $PGL_3(\mathbb{K})$ repräsentiert, muß $t \in \mathbb{K}$ und $b(t - t^{p^N}) \in \mathbb{K}$ sein, wegen $b \notin \mathbb{K}$ muß also gelten:

$$t = t^{p^N} \text{ bzw. } t \in GF(p^N)$$

Betrachte nun den Normalteiler V von Γ_C , der induziert wird von $V' := \{M(r, 1) \in \Gamma'_C : r \in \mathbb{L}\}$, weiter die Untergruppe Z von Γ_C , die induziert wird von $Z' := \{M(0, t) \in \Gamma'_C : t \in \mathbb{L}_*\}$. Es ist $\Gamma_C = V \rtimes Z$ und $\Gamma_C^\epsilon = V^\epsilon \rtimes Z^\epsilon$, sowie $\Gamma_C^\epsilon \cap PGL_3(\mathbb{K}) = (V^\epsilon \cap PGL_3(\mathbb{K})) \rtimes (Z^\epsilon \cap PGL_3(\mathbb{K}))$. Die Menge der $t \in \mathbb{L}$, so daß $EM(0, t)E^{-1} \in GL_3(\mathbb{K})$ ist, ist endlich, also ist $Z^\epsilon \cap PGL_3(\mathbb{K})$ endlich. Da aber $|\Gamma_C^\epsilon \cap PGL_3(\mathbb{K})| = \infty$ ist, ist $W^\beta := V^\epsilon \cap PGL_3(\mathbb{K})$ ein (unendlicher) Normalteiler von $\Gamma_C^\epsilon \cap PGL_3(\mathbb{K})$, also W ein Normalteiler von endlichem Index in $\Gamma_C^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K})$.

(3b) Wir zeigen nun, daß der Fall $a \notin \mathbb{K}$ nicht auftreten kann.

Es sei wieder V der Normalteiler von Γ_C , der induziert wird von $V' = \{M(r, 1) \in \Gamma'_C : r \in \mathbb{L}\}$ und Z die Untergruppe von Γ_C , die induziert wird von $Z' = \{M(0, t) \in \Gamma'_C : t \in \mathbb{L}_*\}$. Weiter sei $A \in GL_3(\mathbb{L})$ ein Repräsentant für die Kollineation α .

Zuerst macht man sich klar, daß $V^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K}) = id$ ist:

Es werde für ein $r \neq 0$ die Kollineation $\mu(r) \in V$ durch $M(r, 1) \in V'$ induziert. Wenn nun $(\mu(r))^\alpha \in PGL_3(\mathbb{K})$ gilt, existiert ein $u \in \mathbb{L}_*$ mit $uAM(r, 1)A^{-1} = B \in GL_3(\mathbb{K})$. Da die Achse $[\infty]^\gamma = [1 : 0 : -a]$ der Elation $(\mu(r))^\gamma$ nur einen \mathbb{K} -rationalen Punkt, nämlich $(0 : 1 : 0)$, enthält und $\gamma = \beta \circ \alpha \circ \mu$ ist mit $\beta \in PGL_3(\mathbb{K})$, $\mu \in \Gamma_C$ (vgl. (1), (2)), enthält die Achse $[\infty]^\alpha$ der Elation

$(\mu(r))^\alpha$ auch nur einen einzigen \mathbb{K} -rationalen Punkt. Dieser ist dann der einzige Fixpunkt in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ der von der Matrix B induzierten Kollineation. Demnach kann man B innerhalb der $GL_3(\mathbb{K})$ zu

$$J = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

konjugieren, denn das charakteristische Polynom $\chi(x) = (x-u)^3$ von B zerfällt über $\mathbb{K}[x]$, da der \mathbb{K} -rationale Punkt auf $[\infty]^\alpha$ von einem Eigenvektor von B repräsentiert wird. Wenn aber $B = TJT^{-1}$ für $T \in GL_3(\mathbb{K})$ gilt, ist diese Gleichung innerhalb $GL_3(\mathbb{L})$ auch erfüllt, ein Widerspruch.

Es sei nun $H \leq \Gamma_C$ gegeben durch $H = \{\mu \in \Gamma_C : \mu^\alpha \in PGL_3(\mathbb{K})\}$ und $H' \subseteq \Gamma_C'$ die Menge der Matrizen, die H induzieren. Jedes nichttriviale $\mu \in H$ wird repräsentiert durch $M(r, t) \in H'$, dabei ist $t \neq 1$ und μ fixiert ein Dreieck mit Ecken $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ und $\left(1 : \frac{r}{1-t} : \left(\frac{r}{1-t}\right)^{p^N}\right)$. Für ein fest gewähltes $\mu_0 \in H \setminus \{id\}$, induziert durch $M(r_0, t_0)$, sei nun $c := \frac{r_0}{1-t_0}$.

Es gilt:

$$M(r, t_0) \in H' \Rightarrow r = r_0$$

Angenommen, $r \neq r_0$ und $M(r, t_0) \in H'$. Dann ist $M(r, t_0)(M(r_0, t_0))^{-1} = M(r - r_0, 1) \in H'$, also enthält H eine nichttriviale Elation, ein Widerspruch zu $V^\alpha \cap PGL_3(\mathbb{K}) = id$.

Es gilt weiter für jedes nichttriviale $M(r, t)$:

$$M(r, t) \in H' \Rightarrow \frac{r}{1-t} = c$$

Angenommen, $M(r, t) \in H'$ und $\frac{r}{1-t} = d \neq c$.

Es ist $M(r, t)M(r_0, t_0)(M(r, t))^{-1} = M(r + r_0t - rt_0, t_0) \in H'$ und deswegen

$$M(r + r_0t - rt_0, t_0)(M(r_0, t_0))^{-1} = M(r - r_0 + r_0t - rt_0, 1) \in H'.$$

Da H keine nichttrivialen Elationen enthält, ist $r - r_0 + r_0t - rt_0 = 0$. Dies wiederum impliziert $(1-t)(1-t_0)(d-c) = 0$. Wegen $t \neq 1$ und $t_0 \neq 1$ ist das ein Widerspruch zur Annahme $c \neq d$.

Es gilt also für eine geeignete Indexmenge I mit $|I| = \infty$:

$$H' = \{M_i := M(c(1-t_i), t_i) \in \Gamma_C : i \in I\}, \quad t_i \neq t_j \text{ für } i, j \in I, i \neq j.$$

Für jedes $i \in I$ existiert demnach ein $u_i \in \mathbb{L}_*$ mit $u_i A M_i A^{-1} =: B_i \in GL_3(\mathbb{K})$. Es sei χ_i das charakteristische Polynom von B_i . Über \mathbb{L} zerfällt χ_i zu $\chi_i(x) = (x - u_i)(x - u_i t_i)(x - u_i t_i^{p^N})$. Die Matrix B_i , interpretiert als Element von $GL_3(\mathbb{L})$, hat demnach die linear unabhängigen Eigenvektoren v_1 zum Eigenwert u_i , v_2 zum Eigenwert $u_i t_i$ und v_3 zum Eigenwert $u_i t_i^{p^N}$ mit $v_1 = Aw, v_2 = Ae_2, v_3 = Ae_3, w = (1, c, c^{p^N})$. Es sei oBdA. A so normiert, daß v_2 , der Repräsentant des Knotens von C^α , ein Vektor im \mathbb{K} -Vektorraum \mathbb{K}^3 ist. Es ist $u_i t_i \in \mathbb{K}$. Der Vektor $v_3 \in \mathbb{L}^3$ repräsentiert die Singularität von C^α , also ist $v_3 \notin \mathbb{K}^3$.

Bevor wir weitermachen, werfen wir einen Blick auf den Sonderfall $t = t^{p^N}$ für $t \neq 1$. In diesem Fall induziert $\widehat{M} := M(c(1-t), t)$ eine Homologie mit Achse $[\infty]$ und Zentrum $(1 : c : c^{p^N})$. Wäre für ein $u \in \mathbb{L}_*$ die Matrix $u A \widehat{M} A^{-1} =: B \in GL_3(\mathbb{K})$, so wäre, da $[\infty]^\alpha$ keine Gerade in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist, die Matrix B innerhalb der $GL_3(\mathbb{K})$ konjugiert zu

$$J = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & ut & 1 \\ 0 & 0 & ut \end{pmatrix},$$

denn das charakteristische Polynom von B müßte über \mathbb{K} zerfallen zu $(x - u)(x - ut)^2$. Da aber in der $GL_3(\mathbb{L})$ die Gleichung $\widehat{M} = TJT^{-1}$ für $T \in GL_3(\mathbb{L})$ nicht lösbar ist, geht das auch nicht in $GL_3(\mathbb{K})$. Also gilt für jedes nichttriviale $M_i \subset H'$:

$$M_i \in H' \Rightarrow t_i \neq t_i^{p^N}$$

Wegen $t_i \neq t_i^{p^N} \forall i \in I$ (außer dem Trivialfall $t_i = 1$) ist also χ_i separabel. Da $S^\alpha \notin \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ ist, ist auch $(1 : c : c^{p^N}) \notin \mathcal{P}_2(\mathbb{K})$, sonst würde χ_i über \mathbb{K} in Linearfaktoren zerfallen. Es ist

$$\chi_i(x) = (x - u_i t_i)(x^2 - x(u_i + u_i t_i^{p^N}) + u_i^2 t_i^{p^N}) =: (x - u_i t_i) \mu_i(x)$$

mit $u_i t_i \in \mathbb{K}$, $\mu_i \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel und separabel über \mathbb{K} . Es existiert deshalb ein nichttrivialer Körperautomorphismus $\phi_i \in \text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_i)$, dabei sei \mathbb{K}_i der Zerfällungskörper von μ_i , und für ϕ_i gilt:

$$\phi_i(u_i) = u_i t_i^{p^N}, \quad \phi_i(u_i t_i^{p^N}) = u_i, \quad \phi_i(u_i t_i) = u_i t_i$$

Wir rechnen:

$$\begin{aligned} u_i t_i &= \phi_i(u_i t_i) = \phi_i(u_i) \phi_i(t_i) = u_i t_i^{p^N} \phi_i(t_i) && \Rightarrow \phi_i(t_i) = t_i^{1-p^N} \\ u_i &= \phi_i(u_i t_i^{p^N}) = \phi_i(u_i) (\phi_i(t_i))^{p^N} = u_i t_i^{p^N} t_i^{(1-p^N)p^N} && \Rightarrow 1 = t_i^{p^N(2-p^N)} \\ 1 &= (t_i^{2-p^N})^{p^N} \Leftrightarrow 1 = t_i^{2-p^N} \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

Da das Polynom $x^{p^N-2} - 1$ nur endlich viele Nullstellen in \mathbb{L} hat, folgt $|I| < \infty$, Widerspruch. \square

Bezeichnungsindex

\mathbb{A}	siehe Seite 19
\mathbb{E}, \mathbb{E}_0	siehe Seite 20
\mathbb{E}_1	siehe Seite 21
$GL_3(\mathbb{A})$	siehe Seite 29
$GF(p^r)$	endlicher Körper mit p^r Elementen
$\mathbb{K}_*, \mathbb{F}_*, \mathbb{L}_*$	entsprechender Körper ohne das Nullelement
\mathbb{M}	siehe Seite 19
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	natürliche Zahlen (ohne Null), natürliche Zahlen mit Null
$o(x), o_p(x)$	siehe Seite 20, 21
$PGL_3(\mathbb{A})$	siehe Seite 29
t	Erzeuger von \mathbb{M} , siehe auch Seite 24
\equiv	für Matrizen oder Polynome A, B : $A \equiv B \Leftrightarrow A = k \cdot B$ für ein $k \neq 0$ aus dem entsprechenden Körper.
\vee	Verbinden von Geraden
$ \cdot _u$	ultrametrischer Betrag
π	in Kapitel 1: kanonischer Homomorphismus in Kapitel 2: Polarität
$(w : x : y)$	siehe Seite 24
$[a : b : c]$	siehe Seite 24
$[\infty]$	siehe Seite 24

Liste der Sätze, Hilfssätze, Bemerkungen und Definitionen

Satz	1	S. 20	(Lemma von Hensel)
Hilfssatz	2	S. 21	(Einheitswurzeln lokaler Körper)
Satz	3	S. 28	(Satz von Tillmann)
Satz	4	S. 32	(Existenz homogener Ovale in ultrametrischen Ebenen)
Hilfssatz	5	S. 34	(homogene T-Ovale bestehen aus endlich vielen Bögen)
Hilfssatz	6	S. 36	(mögliche Kurven für Bögen von homogenen T-Ovalen)
Hilfssatz	7	S. 37	(T-Ovale und KV-Kurven)
Hilfssatz	8	S. 39	(T-Ovale und Translationskurven)
Hilfssatz	9	S. 40	(T-Ovale und VP-Kurven, die gleichzeitig Translationskurven sind)
Hilfssatz	10	S. 41	(Beispiel eines homogenen T-Ovals)
Hilfssatz	11	S. 43	(T-Ovale und VP-Kurven)
Hilfssatz	12	S. 46	(T-Ovale und Kegelschnitte einer Sekantenschar)
Hilfssatz	13	S. 51	(Existenz weiterer homogener T-Ovale)
Hilfssatz	14	S. 54	(T-Ovale und Kegelschnitte einer Tangentenschar)
Hilfssatz	15	S. 55	(T-Ovale und Kegelschnitte einer Passantenschar vom Typ $o(\alpha) = 1$)
Hilfssatz	16	S. 63	(T-Ovale und Kegelschnitte einer Passantenschar vom Typ $o(\alpha) = 0$)
Satz	17	S. 74	(Der Stabilisator eines Kegelschnittes operiert scharf dreifach transitiv)
Satz	18	S. 74	(Buekenhoutgruppen)
Hilfssatz	19	S. 75	(Matrixdarstellung von Kegelschnittstabilisatoren)
Satz	20	S. 79	(gemeinsamer Stabilisator zweier Kegelschnitte über einem algebraisch abgeschlossenen Körper)
Hilfssatz	21	S. 85	(Bijektion zwischen den Quadratklassen und den Punktorbis eines Kegelschnittstabilisators)
Satz	22	S. 87	(gemeinsamer Stabilisator mehrerer Kegelschnitte über einem unendlichen Körper)
Satz	23	S. 94	(nichtsinguläre Kurven vom Grad ≥ 3 haben einen endlichen Stabilisator)
Hilfssatz	24	S. 97	(nur VP-Kurven haben mit dem Stabilisator eines Dreiecks unendlich viele Kollineationen gemeinsam)
Hilfssatz	25	S. 102	(nur Translations- oder VP-Kurven haben mit dem Stabilisator zweier Punkte unendlich viele Kollineationen gemeinsam)
Hilfssatz	26	S. 113	(eine Kurve, die weder eine VP- noch eine Translationskurve ist, hat mit dem Stabilisator zweier Geraden nur endlich viele Kollineationen gemeinsam)
Hilfssatz	27	S. 115	(über Körpern der Charakteristik 0 hat jede Kurve, die keine VP-Kurve ist, einen endlichen Stabilisator)
Hilfssatz	28	S. 119	(Stabilisatoren von KV-Kurven)
Satz	29	S. 131	(Zusammenfassung der singulären Kurven, die einen unendlichen Stabilisator gestatten)
Hilfssatz	30	S. 132	(Scharen von VP-Kurven)
Hilfssatz	31	S. 135	(Scharen von Translationskurven)
Hilfssatz	32	S. 136	(Scharen von KV-Kurven)
Hilfssatz	33	S. 138	(Normalformen von KV-Kurven)
Hilfssatz	34	S. 141	(Normalformen von Translationskurven)
Hilfssatz	35	S. 143	(Normalformen von VP-Kurven)
Hilfssatz	36	S. 148	(Normalformen von VP-Kurven, die gleichzeitig Translationskurven sind)
Definition	1	S. 19	(ultrametrisch bewertete Körper)
Definition	2	S. 20	(primitive Menge)
Bemerkung	3	S. 23	(Ordnungen von Binomialkoeffizienten)
Bemerkung	4	S. 28	
Definition	5	S. 31	(T-Oval)
Bemerkung	6	S. 33	
Bem./Def.	7	S. 73	
Definition	8	S. 74	(Buekenhoutgruppe)
Bem./Def.	9	S. 77	(Kegelschnittscharen)
Definition	10	S. 85	(Quadratklassen)
Definition	11	S. 87	
Bem./Def.	12	S. 96	
Definition	13	S. 97	(VP-Kurven)
Definition	14	S. 101	(Translationskurven)
Definition	15	S. 118	(KV-Kurven)

Literaturverzeichnis

- [1] Barlotti, A.: *Sulle 2-curve nei piani grafici*.
Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 37, 91-97 (1967).
- [2] Blaschke, W.: *Projektive Geometrie*, 3. Auflage.
Birkhäuser Verlag, Basel–Stuttgart (1954).
- [3] Buchanan, T.: *Ovale und Kegelschnitte in der komplexen projektiven Ebene*.
Math.-Phys. Semesterber., N.F. 26, 244-260 (1979).
- [4] Buchanan, T., Hähl, H., Löwen, R.: *Topologische Ovale*.
Geom. Dedicata 9, 401-424 (1980).
- [5] Buekenhout, F.: *Plans Projectifs à Ovoides Pascaliens*.
Arch. Math. 17, 89-93 (1966).
- [6] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*.
Springer Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1996).
- [7] Hughes, D.R., Piper, F.C.: *Projective Planes*.
Graduate Texts in Mathematics. 6. Springer Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1973).
- [8] Hungerford, T.W.: *Algebra*.
Graduate Texts in Mathematics, Vol. 73. Springer Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1980).
- [9] Jacobson, N.: *Basic Algebra II*.
W.H. Freeman and Company, San Francisco (1980).
- [10] Kurzweil, H., Stellmacher, B.: *Theorie der endlichen Gruppen*.
Springer Verlag, Berlin (1998).
- [11] Lang, S.: *Algebra. 3.ed.*
Addison-Wesley, Reading (1993).
- [12] Mazurkiewicz, S.: *Sur un ensemble plan*. Übersetzt in: *Travaux de topologie et ses applications*.
PWN-Editions Scientifiques de Pologne, Warszawa, 46-47 (1969).
- [13] Schikhof, W.H.: *Ultrametric Calculus*.
Cambridge University Press, Cambridge etc. (1984).
- [14] Segre, B.: *Ovals in a finite projective plane*.
Can. J. Math. 7, 414-416 (1955).
- [15] Seidenberg, A.: *Elements of the theory of algebraic curves*.
Addison-Wesley, Reading (1968).
- [16] Tillmann, J.: *Ovale in p -adischen Ebenen*.
Geom. Dedicata 39, 233-251 (1991).

Lebenslauf

Am 25. Oktober 1972 wurde ich in Ochsenfurt geboren. Die Grundschule besuchte ich in den Zweigstellen Biebelried und Kaltensondheim der Verbandsschule Buchbrunn im Landkreis Kitzingen, Unterfranken.

Im Jahr 1983 wechselte ich an das Armin-Knab-Gymnasium in Kitzingen, wo ich 1992 das Abitur ablegte.

Im Wintersemester 1992/1993 nahm ich ein Studium für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg auf. Das erste Staatsexamen absolvierte ich im Herbst 1999.

Von März 2000 bis Februar 2004 arbeitete ich am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg als wissenschaftliche Mitarbeiterin. Im April 2004 habe ich die vorliegende Arbeit zu Ende gebracht und zur Korrektur vorgelegt.

Inzwischen habe ich das Referendariat für das Lehramt begonnen.

Erlangen, im August 2005